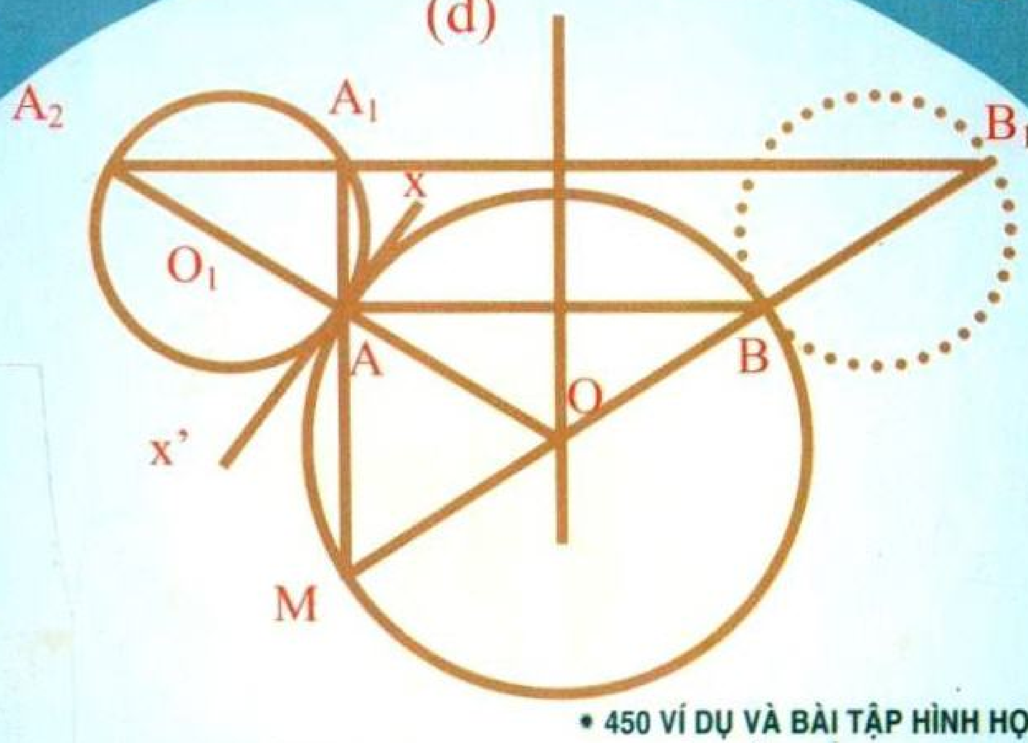
LÊ HỒNG ĐỨC (chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Hình học 10

(*Dùng cho học sinh ban A
và luyện thi đại học*)



- 450 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- 120 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 10

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

- 450 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- 120 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 10

(In lần thứ 2)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

HỌC & ÔN TẬP
TOÁN

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 6 cuốn:

Cuốn 1 : Học & ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học & ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học & ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 4 : Học & ôn tập Toán - Đại số & Giải tích 11
Cuốn 5 : Học & ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 6 : Học & ôn tập Toán - Giải tích 12

Mục tiêu của bộ tài liệu này là cung cấp cho các Thầy, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC & ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 10

được chia thành 3 chương:

Chương I: Vectơ
Chương II: Hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn
Chương III: Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng

bao gồm 12 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 81 dạng toán cơ bản và nâng cao của Hình học 10. Mỗi bài toán được chia thành 4 phần:

Phần I: ***Kiến thức cơ bản*** *: trong phần này tóm lược kiến thức cơ bản của sách giáo khoa cùng một vài mở rộng quan trọng, tiếp tới là việc minh hoạ phương pháp giải các dạng toán thuộc chủ đề này dưới dạng* ***Bài toán*** *với các bước thực hiện.*

Phần II: ***Ví dụ minh hoạ*** *: trong phần này ngoài những ví dụ để các em học sinh hiểu được phương pháp giải cho mỗi dạng toán, chúng em còn đưa thêm vào các bài toán trong các kỳ thi tuyển sinh nhằm mục đích giúp các em học sinh dần tiếp cận với những đòi hỏi của thực tế.*

Phần III: ***Bài tập đề nghị*** *: cùng với những bài tập để các em học sinh luyện tập thêm kỹ năng giải toán, còn có các ví dụ nâng cao và các câu hỏi trắc nghiệm theo qui định mới của Bộ giáo dục.*

Phần IV: ***Hướng dẫn****: phần này trả lời các câu hỏi trắc nghiệm cùng với lời giải cho một số bài tập tiêu biểu.*

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Ths.Lê Hồng Đức
Điện thoại: (04) 7196671
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đướng Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Tôi cũng xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của hai người Thầy mà tôi rất mực kính trọng, gồm GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám đốc Trung Tâm KHTN & CNQG, Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu trưởng Trường PTTH Hà Nội - Amsterdam.

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2003
LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I

VECTƠ

CHỦ ĐỀ 1

VECTƠ - CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

Véctơ là đoạn thẳng:

- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn
- Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của véctơ
- Độ dài của đoạn thẳng gọi là độ dài của véctơ.

Véctơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$

Một véctơ còn được kí hiệu bởi một chữ cái in thường phía trên có mũi tên như : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... độ dài của $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Véctơ không, kí hiệu $\vec{0}$ là vectơ có:

- Điểm gốc và ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.
- Hướng bất kì.

Hai vectơ cùng phương: Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng phương

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ A, B, C, D \text{ thẳng hàng} \end{array}\right.$$

Hai vectơ cùng hướng: Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng} \end{array}\right.$$

Hai vectơ ngược hướng: Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng} \end{array}\right.$$

Góc của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là góc tạo bởi hai tia Ox, Oy, lần lượt cùng hướng với hai tia AB, CD.

- Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng hướng thì $0^0 < x\hat{O}y \leq 180^0$.
- Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng thì $x\hat{O}y = 0^0$.

Hai vectơ bằng nhau

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Hai vectơ đối nhau

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} <> \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

2. PHÉP CỘNG VECTƠ

Định nghĩa: Tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một véctơ được xác định như sau:

- Từ một điểm tùy ý O trên mặt phẳng dựng véctơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
- Từ điểm A dựng véctơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.
- Khi đó véctơ $\overrightarrow{OB}$ gọi là véctơ tổng hợp của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta viết $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

Tính chất của phép cộng véctơ

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, ta có:

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất kết hợp): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất 3: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Tính chất 4: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

3. PHÉP TRỪ VECTƠ

- Ta có : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Với $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

4. PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC

Định nghĩa: Tích của vectơ $\vec{a}$ với một số thực k là một vectơ $k.\vec{a}$ được xác định như sau:

a. Với $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k \neq 0$ thì vectơ $k.\vec{a}$
  - Cùng phương với $\vec{a}$ và sẽ
    - Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$
    - Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
  - Có độ dài bằng $|p|.|\vec{a}|$.

b. $0.\vec{a} = k.\vec{0} = \vec{0}$

Tính chất của phép nhân vectơ với số

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và các số thực m, n, ta có:

Tính chất 1: $1.\vec{a} = -\vec{a}$; $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

Tính chất 2: $m(n.\vec{a}) = (mn).\vec{a}$.

Tính chất 3: $(m+n).\vec{a} = m.\vec{a} + n.\vec{a}$.

Tính chất 4: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m.\vec{a} + n.\vec{b}$.

Tính chất 5: Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $<> \vec{a} = m\vec{b}$.

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh một đẳng thức vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

- Quy tắc ba điểm:

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, xen điểm C.

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.

- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành ABCD luôn có:

  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- Quy tắc trung điểm: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:

  $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh.

Và khi đó ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT => VP hoặc VP => VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi VT, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \text{VP, đpcm.}$$

Nhận xét: Để thực hiện việc biến đổi VT => VP, ta ý thức được rằng cần tạo ra sự xuất hiện của các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$, do đó trong lời giải trên với vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta xen vào điểm D còn vectơ $\overrightarrow{CD}$ ta xen vào điểm B.

Tư tưởng này được sử dụng khi lựa chọn phép biến đổi VP => VT, cụ thể:

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi VP, ta có:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB})$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\text{VT, đpcm.}$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi biểu thức, ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\text{, luôn đúng.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác và M là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Giải

a. Gọi A_1 là trung điểm của BC, do đó:

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA_1} \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{cases} GA = 2GA_1 \\ \overrightarrow{GA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GA_1} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA_1}=-\overrightarrow{GA}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\text{, đpcm.}$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$$

$$=3\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$=3\overrightarrow{MG}\text{, đpcm.}$$

Chú ý: Thông qua kết quả của câu b), ta có thể khẳng định được rằng nếu $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì M là trọng tâm ΔABC, thật vậy:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}=\vec{0} \Leftrightarrow M \equiv G.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

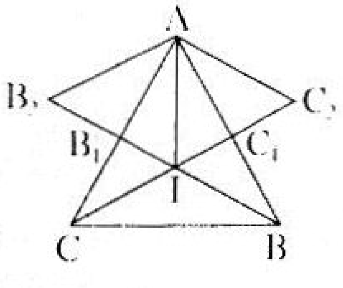
$$a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Giải

Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2//CC_1$ & $AC_2//BB_1$, ta được:

$$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB_2}+\overrightarrow{IC_2}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{IB_2}{IB}=\dfrac{C_1A}{C_1B}=\dfrac{b}{a} \\ \overrightarrow{IB_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB_2}=-\dfrac{b}{a}\overrightarrow{IB}. \qquad (2)$$



$$\begin{cases} \dfrac{IC_2}{IC} = \dfrac{B_1A}{B_1C} = \dfrac{c}{a} \\ \overrightarrow{IC_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ICB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC_2} = -\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}\text{, đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

b. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

Bài tập 3: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ lần lượt có trọng tâm là G_1, G_2. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên đoạn BC, sao cho MB=2MC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài tập 5: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC, sao cho NC=2NA. Gọi K là trung điểm của MN.

a. Chứng minh: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài tập 6: Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng:

$$\text{tg}A.\overrightarrow{HA} + \text{tg}B.\overrightarrow{HB} + \text{tg}C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Bài tập 7: Cho tam giác ABC. Lấy điểm M bất kỳ trong tam giác. Chứng minh rằng:

$$S_{MBC}.\overrightarrow{MA} + S_{MAC}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Kết quả trên còn đúng không khi M ở ngoài tam giác ?

Bài tập 8: Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sin A.\overrightarrow{IA} + \sin B.\overrightarrow{IB} + \sin C.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Có thể tổng quát kết quả trên được không cho đa giác lồi n cạnh $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn tâm I, tức là:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin A_i.\overrightarrow{IA_i} = \vec{0}.$$

Bài tập 9: Cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm tuỳ ý bên trong của tam giác được chiếu xuống ba cạnh tại D, E, F. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Bài tập 10: Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý.

a. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$.

Bài tập 11: Cho hình bình hành ABCD. O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

Bài tập 12: Cho tứ giác ABCD. I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

Bài tập 13: Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$, tâm O. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC nhọn

Gọi B_1, C_1 theo thứ tự là chân được của các đỉnh B, C. Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2 // CC_1$ & $AC_2 // BB_1$.

Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{HA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{HB}$ và $\overrightarrow{HC}$ => dpcm.

Trường hợp 2: Nếu ΔABC tù - *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 12: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày:

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu n = 2k.

Khi đó với đỉnh bất kỳ của đa giác đều có đỉnh đối xứng với nó qua O => dpcm.

Trường hợp 2: Nếu n = 2k − 1.

Khi đó các đỉnh $A_2, ..., A_n$ chia thành hai phần đối xứng qua trục OA_1, bằng cách lập tổng các cặp vectơ đối xứng => dpcm.

Cách 2: Gọi $\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$.

Nhận xét rằng khi quay đa giác một góc bằng $\frac{2\pi}{n}$ thì:

- Đa giác vẫn không đổi, nên tổng $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA}$.
- Vectơ $\overrightarrow{OA}$ sẽ bị quay theo cùng chiều một góc $\frac{2\pi}{n}$.

Suy ra vectơ $\overrightarrow{OA}$ có hướng tuỳ ý <=> $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, dpcm.

BÀI TOÁN 2

BIỂU DIỄN VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong mục này chúng ta giải quyết đòi hỏi " *Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ* ", dựa trên định lý cơ bản sau:

Định lý: Cho trước hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ bao giờ cũng tìm được một cặp số thực α, β duy nhất, sao cho:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ quan tâm tới phương pháp thực hiện được miêu tả trong bài toán sau:

Bài toán : Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

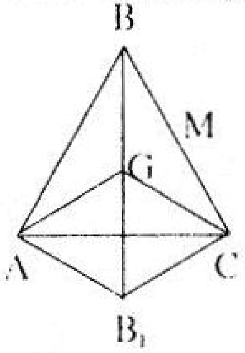
Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, gọi G là trọng tâm tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

a. $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$.

b. $\overrightarrow{MB_1}$, với M là trung điểm BC.



Giải

Từ giả thiết suy ra AB_1CG là hình bình hành.

a. Ta được:

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

b. Ta được:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

c. Ta được:

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI và J là điểm trên BC kéo dài sao cho 5JB = 2JC.

a. Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

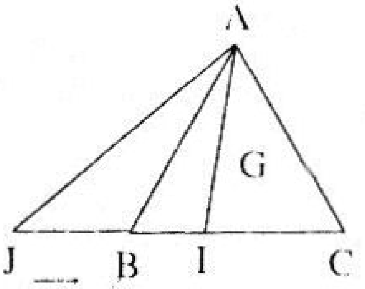
b. Gọi G là trọng tâm ΔABC, tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

Giải

Từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} 2CI = 3BI \\ \overrightarrow{IC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 5JB = 2JC \\ \overrightarrow{JB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{JC} \end{cases} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}. \qquad (2)$$



a. Từ (1), ta được:

$$2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}. \qquad (3)$$

Từ (2), ta được:

$$5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (5)$$

Mặt khác từ hệ tạo bởi (3) và (4), ta nhận được:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \ \& \ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}. \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta nhận được $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho IB = 3IC.

a. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

b. Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho JA = 2JC và KB=3KA. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{JK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

c. Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

☐ $\overrightarrow{BC} = 10\overrightarrow{AI} + 24\overrightarrow{JK}$. ☐ $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, gọi G là trọng tâm tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AB_1}$:

a. $\overrightarrow{AB}$.

☐ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB_1})$. ☐ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB_1})$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}$. ☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB_1}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy tính các vectơ sau theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a. $\overrightarrow{AI}$, với I là trung điểm BO.

☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{BG}$, với G là trọng tâm ΔOCD.

☐ $\overrightarrow{BG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: (Đề 101): Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

a. $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AD}$.

☐ $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{AF}$.

☐ $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$. ☐ Khác.

d. $\overrightarrow{EF}$.

☐ $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$.

Bài tập 3: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB_1})$; $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}$.

Bài tập 4: $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 5: $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

BÀI TOÁN 3

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định điểm M thoả một đẳng thức vectơ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng

$\overrightarrow{OM} = \vec{v}$,

trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

b. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B. Xác định điểm M biết:

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \qquad (11)$$

Giải

Ta tính AM theo AB.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Điểm M hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 2: Cho hai điểm A, B và một vectơ $\vec{v}$. Xác định điểm M biết:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{v} \qquad (11)$$

Giải

Gọi O là trung điểm của AB, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\vec{v}.$$

Điểm M hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là nmột điểm trên cạnh AC, sao cho NC = 2NA.

a. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$. (11)

b. Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$. (22)

Giải

a. Từ giả thiết ta nhận thấy:

$$\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}. \qquad (33)$$

$$\begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}. \qquad (44)$$

Thay (3), (4) vào (1), ta được:

$$6\overrightarrow{AM}+6\overrightarrow{AN}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})$$

$\Leftrightarrow$ K là trung điểm MN.

b. Ta có:

$$\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}\overset{(1)}{=}\overrightarrow{AD}-(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}). \qquad (5)$$

Thay (5) vào (2), ta được:

$$3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12[\overrightarrow{AD}-(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})]=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow$ D là trung điểm BC.

Ví dụ 4: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq 0$.

a. CMR tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b. Từ đó suy ra với điểm bất kỳ M, ta luôn có $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

Giải

a. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AI}=\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})$$

$$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét quan trọng:

1. Nếu $\alpha=\beta=1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.

2. Bài toán trên được mở rộng tự nhiên cho ba điểm A, B, C và bộ ba số thực α, β, γ cho trước thoả mãn $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, tức là:

   a. Tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn

   $$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

   b. Từ đó suy ra với điểm bất kỳ M, ta luôn có

   $$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{IC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MI}.$$

   và khi $\alpha=\beta=\gamma=1$ thì I là trọng tâm ΔABC.

3. Việc mở rộng cho n điểm A_i, $i=\overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $i=\overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, xin dành cho bạn đọc.

4. Kết quả trên được sử dụng để giải bài toán:

" *Cho n điểm* A_i, $i=\overline{1,n}$ *và bộ n số thực* α_i, $\overline{1,n}$ *thoả mãn* $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. *Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = k\overrightarrow{MI}$$ *thoả mãn với mọi điểm M.* "

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD, M là điểm tuỳ ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức vectơ sau thoả mãn với mọi điểm M.

a. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MI}$. (1)

b. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MJ}$. (2)

c. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$. (3)

Giải

a. Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ I, khi đó:

$$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{II}=\vec{0}. \quad (1.1)$$

- Từ (1.1), ta được:

  $2\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ => xác định được điểm I.

- Từ (1.1), ta được:

  $$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(2+1)\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{MI}. \quad (1.2)$$

Từ (1) và (1.2), suy ra $3\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k=3$.

b. Vì (2) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ J, khi đó:

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=k\overrightarrow{JJ}=\vec{0}. \quad (2.1)$$

- Gọi E là trung điểm AB, từ (2.1), ta được:

  $2\overrightarrow{JE}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow$ J là trung điểm của CE.

- Từ (2.1), ta được:

  $$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(1+1+2)\overrightarrow{MJ}=4\overrightarrow{MJ}. \quad (2.2)$$

Từ (2) và (2.2), suy ra $4\overrightarrow{MJ}=k\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow k=4$.

c. Vì (3) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ K, khi đó:

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD}=k\overrightarrow{KK}=\vec{0}. \quad (3.1)$$

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, từ (3.1), ta được:

  $3\overrightarrow{KG}+3\overrightarrow{KD}=\vec{0} \Leftrightarrow$ K là trung điểm của GD.

- Từ (3.1), ta được:

  $$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=(1+1+1+3)\overrightarrow{MK}=6\overrightarrow{MK}. \quad (3.2)$$

Từ (3) và (3.2), suy ra $6\overrightarrow{MK}=k\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow k=6$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tam giác ABC.

a. Tìm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b. Tìm K sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = CB$

c. Tìm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Bài tập 2: Cho các điểm A, B, C, D, E. Xác định các điểm O, I, K sao cho:

a. $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

b. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

c. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE}) = \vec{0}$.

Bài tập 3:

a. Cho ba vectơ có phương phân biệt $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. CMR tồn tại tam giác mà bộ vectơ các cạnh trùng với bộ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Có bao nhiêu tam giác như vậy.

b. Cho n vectơ có phương phân biệt $\overrightarrow{a_i}$, $i = \overline{1,n}$, thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i} = \vec{0}$. Chứng minh rằng tồn tại đa giác lồi n cạnh mà bộ vectơ các cạnh trùng với bộ n vectơ $\overrightarrow{a_i}$, $i = \overline{1,n}$. Có bao nhiêu đa giác như vậy.

Bài tập 4: Cho hình bình hành ABCD, M là điểm tuỳ ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức vectơ sau thoả mãn với mọi điểm M.

a. $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MI}$.

☐ k = 3. ☐ k = 1. ☐ Khác.

b. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MJ}$.

☐ k = 4. ☐ k = 2. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$.

☐ k = 6. ☐ k = 4. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. Gọi M, N, F là trung điểm AB, BC và AC, ta có:

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} + 4\overrightarrow{ON} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{FO} + 4(\overrightarrow{FN} - \overrightarrow{FO}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{FO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FN}.$$

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GI} + (\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GD}.$$

c. K là trọng tâm ΔDEG.

Bài tập 4: a) k=3; b) k=2; c) k=6.

BÀI TOÁN 4
QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm quỹ tích điểm M thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}|=k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng k.AB.
3. Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì
   - Với $k\in R$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
   - Với $k\in R^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
   - Với $k\in R^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$. (1)

b. $|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$. (2)

Giải

a. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ⇔ I là trọng tâm ΔABC.

Ta được:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MI}$. (3)

Mặt khác nếu gọi E là trung điểm BC, ta được:

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{ME}$. (4)

Thay (3), (4) vào (1), ta được:

$|\overrightarrow{MI}|=|\overrightarrow{ME}|$ ⇔ M thuộc đường trung trực của đoạn IE.

b. Gọi K là điểm thoả mãn hệ thức

$\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ ⇒ tồn tại duy nhất điểm K.

Ta được:

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MK}$. (5)

Mặt khác:

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AE}$. (6)

Thay (5), (6) vào (2), ta được:

$|\overrightarrow{MK}|=|\overrightarrow{AE}|$ ⇔ M thuộc đường tròn tâm K, bán kính bằng AE.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. (1)

b. $(1-k)\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. (2)

Giải

a. Ta biến đổi (1) về dạng:

$\overrightarrow{MA}=k(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.

b. Ta biến đổi (2) về dạng:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-k(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=\vec{0}$. (3)

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và AC, ta được:

$(3) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}-2k\overrightarrow{MF}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{MF}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường trung bình EF của ΔABC.

Ví dụ 3: Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho OM+ON=a (a là độ dài cho trước). Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

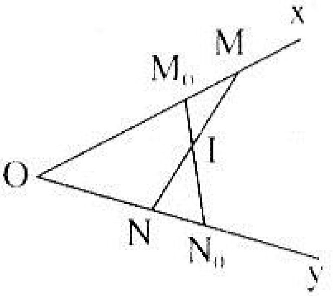
Giải

Lấy hai điểm M_0, N_0 thuộc Ox, Oy sao cho:

$OM_0=ON_0=\frac{a}{2}$.

Giả sử OM=k thì ON=a-k, với $0\le k\le a$, khi đó:

$\overrightarrow{OM}=\frac{2k}{a}\overrightarrow{OM_0}$ & $\overrightarrow{ON}=\frac{2(a-k)}{a}\overrightarrow{ON_0}$.



Vì I là trung điểm của đoạn MN, ta được:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}[\frac{2k}{a}\overrightarrow{OM_0}+\frac{2(a-k)}{a}\overrightarrow{ON_0}]$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0I}=\frac{k}{a}\overrightarrow{OM_0}+\frac{a-k}{a}\overrightarrow{ON_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0I}=(\frac{k}{a}-1)\overrightarrow{OM_0}+\frac{a-k}{a}\overrightarrow{ON_0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{M_0I}=(a-k)(\overrightarrow{ON_0}-\overrightarrow{OM_0})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0I}=\frac{a-k}{a}\overrightarrow{M_0N_0}$$

Vậy quỹ tích I thuộc đoạn M_0N_0.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐHMĐC - 99): Cho ΔABC, M là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng.

a. CMR vectơ $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|.$$

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

b. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

c. $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, $k \in R$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $k \in R$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC, hai điểm M, N di động trên các tia AB và AC sao cho

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA}.$$

Dựng hình bình hành MNCP. Tìm tập hợp những điểm P.

Bài tập 5: Cho ΔABC, các điểm M, N, P di động trên các tia BC, CA và AB sao cho :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}.$$

Dựng hình bình hành MNPQ. Tìm tập hợp những điểm Q.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: (ĐHMĐC - 99):

a. Ta có:

$$\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}.$$

b. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức

$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ => tồn tại duy nhất điểm I.

Ta được:

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (3+2-2)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}.$$

(1)

Mặt khác:

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}. \qquad (2)$$

Thay (1), (2) vào hệ thức của câu b), ta được:

$$3|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}BC$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính bằng $\frac{1}{3}$BC.

Bài tập 3:

a. Đường thẳng qua B song song với AC.

b. Đường trung bình song song với AC.

BÀI TOÁN 5

CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU
CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh hai điểm trùng nhau – Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Muốn chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai hướng:

   Hướng 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

   Hướng 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

2. Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

   $$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC},\ k \in R. \qquad (1)$$

   Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng:

   Hướng 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ đã biết.

   Hướng 2: Xác định vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý: Sử dụng kết quả trong nhận xét quan trọng ở bài toán 3, ta có được phát biểu:

" *Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là:*

$$\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB},$$

với điểm tuỳ ý M và số thực α *bất kỳ* ".

Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì C thuộc đoạn AB.

Kết quả trên ngoài ra còn được sử dụng để tìm điều kiện cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC. Lấy các điểm $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Giải

Gọi G, G_1 theo thứ tự là trong tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1}) +$$

$$+ (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C_1})$$

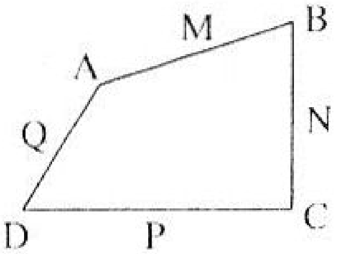
$$= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1}) + 3\overrightarrow{GG_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Leftrightarrow G = G_1.$$

Ví dụ 2: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Giải

Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ANP và CMQ và O là một điểm tuỳ ý.



Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG_1} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OG_2} \end{cases} \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta suy ra $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2} \Leftrightarrow G_1 \equiv G_2$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy các điểm I, J sao cho:

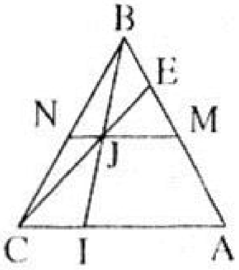
$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \qquad (1)$$

$$2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}. \qquad (2)$$

a. CMR M, N, J thẳng hàng, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC.

b. CMR J là trung điểm của BI.

c. Gọi E là điểm thuộc AB thoả mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.



Giải

a. Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JM} + 3\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{M, N, J thẳng hàng.}$$

b. Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IJ}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IJ}) + 3(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}) + 5\overrightarrow{IB} - 10\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \text{J là trung điểm của BI.}$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow \text{CJ cắt AB tại điểm E thoả mãn } \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{5}{7}.$$

Chú ý: Trong lời giải c) chúng ta đã sử dụng kết quả " *Nếu* $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ *thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thoả mãn* $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ".

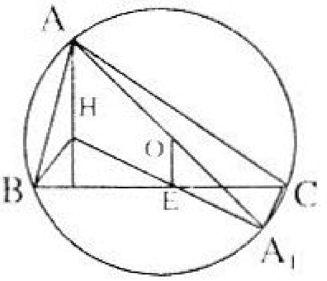
Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của ΔABC. CMR O, G, H thẳng hàng.

Giải

Chọn tổ hợp hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (1)$$



Gọi E là trung điểm BC và A_1 là điểm đối xứng với A qua O, ta được:

$$\begin{cases} BH \parallel CA_1 \text{ cùng vuông góc với } AC \\ CH \parallel BA_1 \text{ cùng vuông góc với } AB \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A_1BHC là hình bình hành $\Rightarrow$ A_1, E, H thẳng hàng $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ $\Leftrightarrow$ O, G, H thẳng hàng.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài tập 2: Cho ΔABC. Lấy các điểm $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

a. Chứng minh rằng $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB}$.

b. Xác định vị trí của A_1, B_1, C_1 để AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy.

Bài tập 3: Cho lục giác ABCDEF có AB⊥EF và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2+EF^2=CD^2$.

Bài tập 4: Cho ΔABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho:

$$\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

CMR M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho ΔABC. Lấy các điểm M, N sao cho:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

CMR M, N, G thẳng hàng, với G là trọng tâm ΔABC.

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k.\overrightarrow{DC}$.

a. CMR $\overrightarrow{MN} = (1-k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$.

b. Gọi các điểm E, F, I theo thứ tự thuộc AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = l.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = l.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MI} = l.\overrightarrow{MN}$. CMR E, F, I thẳng hàng.

BÀI TOÁN 7

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả:

a. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq0$. Nếu có

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$$

thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thoả mãn:

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$$

Đặc biệt khi $\alpha=\beta\neq0$ thì I là trung điểm của AB.

b. Cho trước ba điểm A, B, C và ba số thực α, β, γ thoả mãn $\alpha+\beta+\gamma\neq0$. Nếu có:

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$$

thì đường thẳng MN sẽ đi qua điểm cố định I thoả mãn:

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Đặc biệt khi $\alpha=\beta=\gamma\neq0$ thì I là trọng tâm ΔABC.

c. Việc mở rộng cho n điểm A_i, $i=\overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $i=\overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq0$, xin dành cho bạn đọc.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

a. CMR MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Gọi P là trung điểm của CN. CMR MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Giải

a. Với G là trọng tâm ΔABC ta luôn có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Từ giả thiết ta nhận được:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$$

Vậy MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})$$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J - cố định.

Từ đó:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(1+1+2)\overrightarrow{MJ}=2\overrightarrow{MJ}$$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.$$

a. CMR MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b. Gọi P là trung điểm của CN. CMR MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Bài tập 2: Cho tứ giác lồi ABCD, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}.$$

a. CMR MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b. Gọi P là trọng tâm của ΔABN. CMR MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Gọi I là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm I - cố định.

Từ giả thiết ta nhận được:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+5-1)\overrightarrow{MI}=5\overrightarrow{MI}.$$

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định I khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB})$$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}=\vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J - cố định.

Từ đó:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(1+5)\overrightarrow{MJ}=3\overrightarrow{MJ}$$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

BÀI TOÁN 8

NHẬN DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định đặc tính K của đối tượng S khi nó thoả mãn một đẳng thức vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Giả sử tồn tại điểm O sao cho:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| & (1) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

CMR ΔABC là tam giác đều.

Giải

Từ (1), ta suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (3)

Gọi G là trọng tâm ΔABC, từ (2) ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv O. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra ΔABC là tam giác đều.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn

$$a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (1)$$

CMR ΔABC là tam giác đều.

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$a.(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b-a).\overrightarrow{GB} + (c-a).\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (3)$$

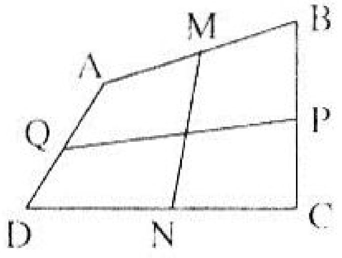
Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương, do đó (3) tương đương với

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, AD thoả mãn

$$MN+PQ=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA). \qquad (1)$$

CMR ABCD là hình bình hành.



Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN},$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}) \Rightarrow MN\le\frac{1}{2}(AD+BC). \qquad (2)$$

Tương tự ta được:

$$PQ\le\frac{1}{2}(AB+CD). \qquad (3)$$

Từ (2), (3), suy ra:

$$MN+PQ\le\frac{1}{2}(AD+BC+AB+CD). \qquad (4)$$

Vậy (1) có được khi dấu "=" xảy ra tại (4)

$\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra tại (2) & (3) $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AD}\,//\,\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}\end{cases} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ giác ABCD. Giả sử tồn tại điểm O sao cho:

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|\\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{cases}.$$

CMR ABCD là hình chữ nhật.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC, có các cạnh a, b, c. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường cao từ A, B, C. CMR ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

Bài tập 3: Cho tam giác ABC, có các cạnh a, b, c. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C.

a. Tính $\overrightarrow{AA_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b. CMR ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh BC, AC, AB. CMR ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Từ phương trình thứ nhất của hệ , ta suy ra O là tâm đường ttròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. (1)

Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA , từ (2) ta được:

$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M, P, O thẳng hàng và O là trung điểm MP. (2)

$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ N, Q, O thẳng hàng và O là trung điểm NQ. (3)

Từ (2), (3), suy ra MNPQ là hình bình hành suy ra

- A, C, O thẳng hàng và O là trung điểm AC.
- B, D, O thẳng hàng và O là trung điểm BD.

Do đó ABCD là hình bình hành. (4)

Từ (1) và (4) suy ra ABCD là hình chữ nhật.

Bài tập 2:

a. Ta có:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

b. Tương tự câu a), ta được:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{c+a}\overrightarrow{BA} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} - \frac{a}{c+a}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{c}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB} = -\frac{c}{a+b}\overrightarrow{AC} - \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BC}.$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} - \frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ không cùng phương, nên đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} + \dfrac{c}{b+c} - \dfrac{c}{a+b} = 0 \\ \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} - \dfrac{c}{c+a} + \dfrac{b}{a+b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI TOÁN 9
ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Đẳng thức – bất đẳng thức vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các tính chất:

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ luôn có:

Tính chất 1: $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$,

từ đó nếu $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ thì $|\vec{c}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Tính chất 2: $|\vec{a}-\vec{b}| \ge |\vec{a}| - |\vec{b}|$,

từ đó nếu $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$ thì $|\vec{c}| \ge |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai vectơ cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \ne \vec{0}$). Hãy tìm mối liên hệ giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu có một trong hai điều kiện sau:

a. $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

b. $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$.

Giải

a. Ta có:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

b. Ta có:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC và đường thẳng (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}| = MG,$$

Từ đó $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G lên (d).

Ví dụ 3: (IMO lần thứ 15): Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy 2n+1 điểm P_i, $i = \overline{1,2n+1}$ ở cùng một phía đối với một đường kính nào đó. CMR:

$$\left|\sum_{i=1}^{2n+1} \overrightarrow{OP_i}\right| \ge 1. \qquad (1)$$

Giải

Ta đi chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 0, (1) hiển nhiên đúng bởi khi đó $|OP_0| = 1$.

- Giả sử (1) đúng với n = k, tức là:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+1}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1. \qquad (22)$$

- Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1, tức là cần chứng minh:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+3}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1. \qquad (33)$$

Thật vậy, trong số 2k+3 vectơ trên ta chọn hai vectơ có góc tạo bởi chúng nhỏ nhất, không mất tổng quát giả sử chúng là $\overrightarrow{OP_1}$ và $\overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

Đặt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

Theo giả thiết quy nạp, ta được:

$$\overrightarrow{ON} = \sum_{i=2}^{2k+2}\overrightarrow{OP_i} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \left|\sum_{i=2}^{2k+2}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1.$$

Nhận xét rằng $\overrightarrow{ON}$ nằm trong góc $P_1\hat{O}P_{2k+3}$ do đó góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ nhọn, suy ra:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+3}\overrightarrow{OP_i}\right| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| \geq |\overrightarrow{OM}| \geq 1.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. CMR với điểm I bất kỳ trên cạnh AB (với I khác: A, B) luôn có:

$$IC.AB < IA.BC + IB.AC.$$

Bài tập 2: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có độ dài không vượt quá 1. CMR có thể tìm được hai vectơ trong chúng sao cho tổng hoặc hiệu của hai vectơ đó có độ dài không vượt quá 1.

Bài tập 3: Cho n vectơ $\overrightarrow{a_i}$, $i = \overline{1,n}$ có độ dài không vượt quá 1. CMR trong tổng $\vec{c} = \overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{a_n}$ có thể chọn các dấu sao cho $|\vec{c}| \leq \sqrt{2}$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Giả sử $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$ thì $\overrightarrow{IB} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$ với $0 < \alpha < 1$.

Ta có:

$$IC = |\overrightarrow{CI}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}| = |\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA} + \alpha(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})|$$

$$= |(1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}| < (1-\alpha)CA + \alpha CB, \qquad (1)$$

bởi $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương

Vậy , từ (1) ta được:

$$IC.AB < (1-\alpha)CA.AB + \alpha CB.AB = IB.AC + IA.BC.$$

CHỦ ĐỀ 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ

1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

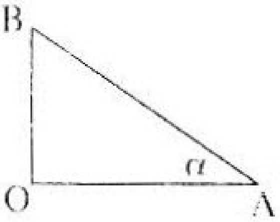
Cho ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OB}{AB}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OA}{AB}.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{OB}{OA}.$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{OA}{OB}.$$



2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Độ đo / Hàm	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotgα	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

3. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Ta có các kết quả sau:

Độ đo / Hàm số lượng giác	$0<\alpha<90^0$	$90^0<\alpha<180^0$
cosα	+	-
sinα	+	+
tgα	+	-
cotgα	+	-

4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

b. $\cos(180^0 - \alpha) = \cos\alpha$.

c. $\text{tg}(180^0 - \alpha) = -\text{tg}\alpha$.

d. $\text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\text{cotg}\alpha$.

d. $\cot g(180^0 - \alpha) = -\cot g\alpha$.

5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

a. $\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha$.

b. $\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$.

c. $tg(90^0-\alpha)=\cot g\alpha$.

d. $\cot g(90^0-\alpha)=tg\alpha$.

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) ký hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha, \text{ với } \alpha = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Từ định nghĩa ta có các kết quả:

a. $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

b. $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow 0^0 \leq \alpha < 90^0$.

c. $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

d. $\vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow 90^0 < \alpha \leq 180^0$.

Nếu một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì ta quy ước:

$$\vec{a}.\vec{0} = \vec{b}.\vec{0} = 0$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và với mọi số thực k ta đều có :

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất phân phối): $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

Tính chất 3: $m(\vec{a}).\vec{b} = m(\vec{a}.\vec{b})$.

3. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$.
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$.
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

4. CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU

a. Nếu 4 điểm A, B, C, D cùng ở trên một trục thì:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}.$$

b. Nếu A', B' là hình chiếu của A, B lên giá của $\overrightarrow{CD}$ thì:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}.$$

BÀI TOÁN 1

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC CHỨA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 3a.\cos 0^0 + b.\sin 90^0 + a.\cos 180^0$.

b. $B = 4a^2.\sin^2 45^0 - 3(a.\mathrm{tg}45^0)^2 + (2a.\cos 45^0)^2$.

Giải

a. Ta có A=3a+b-a=2a+b.

b. Ta có $B = 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{a^2.\sin 180^0 - b^3\sqrt{2}.\sin 135^0 - 2ab^2.\cos 150^0}{a.\mathrm{cotg}150^0 - b.\cos 0^0 + 2a\mathrm{tg}60^0}.$$

Giải

$$\text{Ta có } A=\frac{-b^3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+2ab^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{-a\sqrt{3}-b+2a\sqrt{3}}=\frac{-b^3+ab^2\sqrt{3}}{a\sqrt{3}-b}=\frac{b^2(a\sqrt{3}-b)}{a\sqrt{3}-b}=b^2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^3 60^0.$$

☐ $A=\frac{3}{4}$. ☐ $A = -\frac{3}{4}$. ☐ Khác.

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (a^2 + 1).\sin 0^0 + b.\cos 90^0 + c.\cos 180^0.$$

☐ A = c. ☐ A = b + c. ☐ Khác.

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 4\cos^4 135^0 - 8\sin^3 150^0 - 3(\mathrm{tg}^2 120^0 - \mathrm{tg}^4 135^0).$$

☐ A = −8. ☐ A = −6. ☐ Khác.

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{a^2\sin 90^0 - b^2\cos 0^0}{a.\mathrm{cotg}45^0 + b.\cos 180^0 - 2a.\mathrm{cotg}90^0}$.

☐ A = a − b. ☐ A = a + b. ☐ Khác.

BÀI TOÁN 2

TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tính tích vô hướng của hai vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: *Sử dụng định nghĩa* bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ về cùng gốc để xác định được góc $\alpha=(\vec{a}, \vec{b})$, từ đó:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha.$$

Phương pháp 2: *Sử dụng các tính chất* và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

Phương pháp 3: *Sử dụng định lý hình chiếu*: với A', B' là hình chiếu của A, B lên giá của $\overrightarrow{CD}$, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

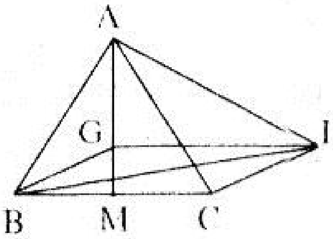
Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G.

a. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ & $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b. Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. CMR BCIG là hình bình hành, từ đó tính $\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

Giải

a. Ta có:



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 60^0 = a.a.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2.$$

Ta có:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^0.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos 120^0 = a.a.(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a^2.$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GI})-2(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GI})+4(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GI})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow \text{BCIG là hình bình hành.}$$

Gọi M là trung điểm BC, ta được:

$$\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA}).2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AM}$$

$$=2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}-2GA.AM=-2\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=-a^2.$$

$$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}) = IA^2+\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= AG^2+GI^2-a^2+\frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 - a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{5a^2}{6}.$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = (\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA})(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}) = IG^2+\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{IC}$$

$$= IG^2+\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = IG^2+IG.IC.\cos 30^0+GA.GB.\cos 120^0$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{17a^2}{24}.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c, từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

b. Gọi M là trung điể BC và G là trọng tâm ΔABC, tính độ dài AM từ đó suy ra độ dài AG và cosin góc nhọn tạo bởi AG và BC.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

theo tính giao hoán, ta có:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2).$$

Bằng cách tính tương tự, ta được:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2) \;\&\; \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2) - \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) - \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) = -\frac{1}{2}(a^2+c^2+b^2).$$

Chú ý: Ta cũng có thể tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ bằng cách:

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$. (2)

Bình phương hai vế của (2), ta được:

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2+BC^2+CA^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(a^2+c^2+b^2).$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}). \qquad (3)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được:

$$AM^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{4}[c^2+b^2+2.\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)]=\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow AM=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}. \qquad (*)$$

Suy ra

$$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}=\frac{1}{3}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}.$$

Chú ý: Công thức (*) là công thức quan trọng cần nhớ.

c. Gọi α là góc nhọn tạo bởi AG và BC, khi đó:

$$|\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{BC}|}. \qquad (4)$$

Ta đi tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$, bằng cách:

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(AC^2-AB^2)=\frac{1}{3}(b^2-c^2). \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

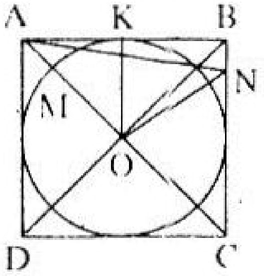
$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{3}|b^2-c^2|}{\frac{1}{3}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}.a}=\frac{|b^2-c^2|}{a.\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}.$$

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. M là điểm tuỳ ý trên đường tròn nội tiếp hình vuông và N là điểm tuỳ ý trên cạnh BC. Tính:

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

b. $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$.

c. $\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{BA}$.



Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+$$
$$+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})$$
$$=2MO^2+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}+$$
$$+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{4}a^2,$$

bởi $OA\perp OB$, $OC\perp OD$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b. Nhận xét rằng B là hình chiếu vuông góc của N lên AB, do đó:

$$\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-AB^2=-a^2.$$

c. Gọi K là trung điểm của AB, suy ra M là hình chiếu vuông góc của O lên AB, do đó:

$$\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}a.a=\frac{1}{2}a^2.$$

Chú ý: Với các bài toán có điều kiện, chúng ta cần vận dụng linh hoạt điều kiện để nhận được biểu thức cần dùng, cụ thể giả sử bài toán yêu cầu tính:

$$A=(\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b})(\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b})$$

biết rằng $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=c$, khi đó ta hiểu rằng:

$$A=\alpha_1\alpha_2\vec{a}^2+\beta_1\beta_2\vec{b}^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\vec{a}.\vec{b}$$

$$=\alpha_1\alpha_2a^2+\beta_1\beta_2b^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\vec{a}.\vec{b}.$$

Như vậy từ giả thiết ta cần nhận được giá trị của tích $\vec{a}.\vec{b}$, để có được nó ta sử dụng:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=c \Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})^2=c^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}=c^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)$$

Suy ra:

$$A=\alpha_1\alpha_2a^2+\beta_1\beta_2b^2+\frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(c^2-a^2+b^2).$$

Ví dụ 4: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính:

$$A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}.$$

Giải

Từ giả thiết:

$$\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-2\vec{c} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=4\vec{c}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=4\vec{c}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=\frac{1}{2}(3c^2-a^2-b^2).$$

Vậy $A=\frac{1}{2}(3c^2-a^2-b^2)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC đều cạnh bằng a, đường cao AH. Tính:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$.

☐ $-a^2/4$. ☐ $a^2/4$. ☐ Khác.

b. $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$.

☐ $a^2/2$. ☐ 0. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC có AB=3, BC=5, CA=4. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

☐ ☐ ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC có AB=2, BC=3, CA=4.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ ☐ ☐ Khác.

b. Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho CD=$\frac{1}{3}$CA. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$

☐ ☐ ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có AB=6, AC=8, BC=10.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ ☐ ☐ Khác.

b. Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho AM=2. trên cạnh AC, lấy điểm N sao cho AN=4. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

☐ ☐ ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB=2, đáy lớn BC=3, đáy nhỏ AD=2.

a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -4$. ☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-2$. ☐ Khác.

b. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

☐ $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=2$. ☐ $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=3$. ☐ Khác.

c. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

☐ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-1$. ☐ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=1$. ☐ Khác.

d. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$, với I là trung điểm của CD.

☐ $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=0$. ☐ $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=60^0$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho lục giác đều ABCDEF, tâm O cạnh bằng a. Tích các tích vô hướng sau:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$.

☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=a^2$. ☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=-a^2$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.

☐ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. ☐ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=-2a^2$. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3a^2/2$. ☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2/2$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính:

$$A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}.$$

☐ A=5. ☐ A=4. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = -\dfrac{a^2}{4}$. b. $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 0$.

Bài tập 5:

a. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -4$.

b. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = 3$.

c. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -1$.

d. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Bài tập 6:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = a^2$.

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 2a^2$.

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Bài tập 7: $A = -5$.

BÀI TOÁN 3

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY VỀ ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai dạng:

Dạng 1: *Với các biểu thức về tích vô hướng* ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng, cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi.

Dạng 2: *Với các biểu thức về độ dài* ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A và B, O là trung điểm của AB, M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2.$$

Giải

Ta có:

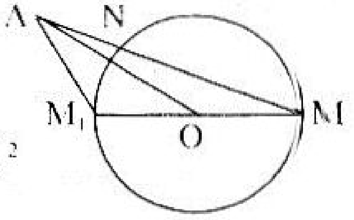
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OM} + OM^2$$
$$= OM^2 - OA^2, \text{ dpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho MM_1 là đường kính bất kỳ của đường tròn tâm O, bán kính R. A là điểm cố định và OA=d. Giả sử AM cắt (O) tại N.

a. Chứng minh rằng tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1}$ có giá trị không phụ thuộc M.

b. Chứng minh rằng tích $\overline{AM}.\overline{AN}$ có giá trị không phụ thuộc M.

Giải



a. Ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM_1} - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_1}).\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2$$
$$= OA^2 - OM^2 = d^2 - R^2.$$

b. Ta có:

$$\overline{AM}.\overline{AN} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1N})$$
$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{M_1N} = d^2 - R^2.$$

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC, BD là hai dây thuộc nửa đường tròn, cắt nhau tại E. CMR:

$$\overline{AE}.\overline{AC} + \overline{BE}.\overline{BD} = AB^2.$$

Giải

Ta có:

$$\overline{AE}.\overline{AC} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$
$$\overline{BE}.\overline{BD} = \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}. \quad (2)$$

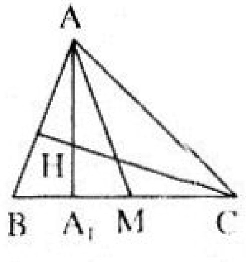
Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$\overline{AE}.\overline{AC} + \overline{BE}.\overline{BD} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}).\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}).\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 = AB^3.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

b. $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.



Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM}).(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM})$$
$$= \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM} \quad (1)$$

Gọi A_1 là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, ta được:

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{CM}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA_1}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$$

$$= (\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{BA_1})\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$$

$$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM} = BC.\frac{BC}{2} - \frac{BC}{2}.\frac{BC}{2} = \frac{1}{4}BC^2.$$

b. Ta có:

$$AH^2 = \overrightarrow{AH}^2 = (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 = MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$$

$$= MH^2 + MA^2 - 2.\frac{1}{4}BC^2$$

$$\Leftrightarrow MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2, \text{ dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC, M và M' là hai điểm tuỳ ý. Gọi H và H', K và K', L và L' lần lượt là hình chiếu của M và M' trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KK'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{LL'} = 0$$

Bài tập 3: Cho ΔABC, đường cao AH, gọi I là trung điểm của trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a. $AB^2 - AC^2 = 2\overline{AB}.\overline{MH}$.

b. $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$.

Bài tập 4: Cho ΔABC đều cạnh bằng a, gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng:

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4.$$

Bài tập 5: Cho 4 điểm M, A, B, C tuỳ ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

BÀI TOÁN 4

CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC, THIẾT LẬP ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh tính vuông góc - Thiết lập điều kiện vuông góc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta dùng định lý:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{0}\\ \vec{b}=\vec{0}\\ \cos(\vec{a},\vec{b})=0\end{array}\right.$$

Ngoài ra, ta còn sử dụng các tính chất của tích vô hướng.

Chú ý: Nếu $\vec{a}\,(a_1, a_2)$ và $\vec{b}\,(b_1, b_2)$ thì điều kiện

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2=0.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng trong tam giác ba đường cao đồng quy.

Giải

Gọi H là giao điểm của hai đường cao BB_1, CC_1 của ΔABC, để chứng minh ba đường cao trong ΔABC đồng quy, ta đi chứng minh $AH \perp BC$, thật vậy:

$$\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{HA}\,.(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{HB}\,.(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{HC}\,.(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0.$$

Chú ý: Các em học sinh cần lưu ý, người ta có thể phát biểu dưới dạng khác để chuyển nó thành một bài thi, cụ thể đề thi ĐHXD - 2000 yêu cầu:

" *Cho bốn điểm A, B, C, D. CMR nếu $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $AC \perp BD$* ".

khi đó ta thấy ngay C chính là trực tâm ΔABD.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Giải

Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{DE}=0$, thật vậy:

$$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}[AB.AE.\cos(90^0+A) - AC.AD.\cos(90^0+A)] = 0$$

vì AB.AE= AC.AD.

Vậy $AM \perp DE$, đpcm.

Ví dụ 3: Cho bốn điểm A, B, C, D. CMR $AB \perp CD$ khi và chỉ khi

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$0 = (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + (\overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AD}^2)$$

$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

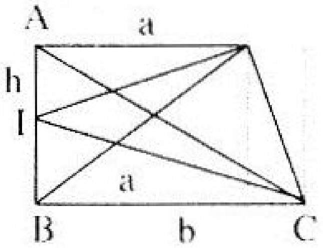
$\Leftrightarrow AB \perp CD.$

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy AD=a, BC=b, đường cao AB=h. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. $BD \perp CI$, với I là trung điểm của AB.

b. $AC \perp DI$.

c. $BM \perp CN$, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AC và BD.



Giải

a. Ta có:

$BD \perp CI \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CI} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{C_1A} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} = ab + h.\frac{h}{2}$

$\Leftrightarrow h^2 = 2ab.$

b. Ta có:

$AC \perp DI \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{D_1B} = h.\frac{h}{2} - ba$

$\Leftrightarrow h^2 = 2ab.$

c. Ta có:

$BM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CN} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$

$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

$= -\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD_1} = -b^2 + h^2 - b(b - a) = -2b^2 + h^2 + ab$

$\Leftrightarrow h^2 = 2b^2 - ab.$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, gọi M là trung điểm BC. Lấy các điểm B_1, C_1 trên AB và AC sao cho $AB.AB_1 = AC.AC_1$. CMR $AM \perp B_1C_1$.

Bài tập 2: Cho ΔABC cân đỉnh A, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân đỉnh A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, M là trung điểm của AB, E là trọng tâm ΔACM. Chứng minh rằng $OE \perp CM$.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân đỉnh A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp, gọi BB_1 và CC_1 là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng $OA \perp B_1C_1$.

Bài tập 5: Cho ΔABC có các cạnh BC=a, CA=b, AB=c. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi H là điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

a. Chứng minh rằng H là trực tâm ΔABC.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để $OH \perp AM$, với M là trung điểm BC.

Bài tập 6: Cho ΔABC, biết $BC^2+AC^2=5AB^2$. CMR hai trung tuyến AE và BF vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy AB=a, CD=b, đường cao AD=h. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. $AC \perp BD$.

☐ $ab=h^2$. ☐ $ab=2h^2$. ☐ Khác.

b. $BD \perp AM$, với M là trung điểm của BC.

☐ $a(a-b)=h^2$. ☐ $a(a+b)=h^2$. ☐ Khác.

Bài tập 8: (ĐHGTVT - 98): Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn AB và góc $\widehat{BAD}=60^0$. Biết $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ và $|\vec{a}|=a>|\vec{b}|=b$.

a. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BC}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

☐ $\overrightarrow{BC}=-\frac{b}{a}.\vec{a}+\vec{b}$. ☐ $\overrightarrow{BC}=\vec{a}-\frac{b}{a}.\vec{b}$. ☐ Khác.

b. Tìm mối quan hệ giữa $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ để $AC \perp BD$.

☐ $2a^2-b^2-2ab=0$. ☐ $2a^2+b^2+2ab=0$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Từ giả thiết suy ra

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC_1}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB_1})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB_1})=0$$

$\Leftrightarrow AM \perp B_1C_1$.

Bài tập 2: Biểu diễn các vectơ dựa trên quan hệ vuông góc, cụ thể:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}) \text{ và } \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

Chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}=0$ bằng việc sử dụng định lý hình chiếu.

Bài tập 3: Thiết lập biểu thức điều kiện và sử dụng định lý hình chiếu.

Bài tập 4: *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 5:

a. Gọi M là trung điểm BC, ta được:

$OM \perp BC$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow AH \parallel OM \Rightarrow AH \perp BC$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $BH \perp CA$ và $CH \perp AB$.

Vậy, H là trực tâm của ΔABC.

b. Lưu ý O, H, G thẳng hàng với G là trọng tâm ΔABC.

Bài tập 7:

a. $ab = h^2$.

b. $a(a + b) = h^2$.

Bài tập 8:

a $\overrightarrow{BC} = \frac{b}{a}.\vec{a} + \vec{b}$.

a $2a^2 - b^2 - 2ab = 0$.

BÀI TOÁN 5

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG - ĐỊNH TÍNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán định lượng, địnhtính.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với các *bài toán định lượng*, ta sử dụng các kết quả:

   a. Gọi α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

   b. Để tính độ dài đoạn AB, ta thực hiện:

   $$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

   rồi thực hiện phép phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ thành tổ hợp các vectơ cơ sở.

2. Với các *bài toán định tính*, ta biến đổi điều kiện ban đầu thành biểu thức của tích vô hướng, rồi từ đó dẫn tới

   $$\left[\begin{array}{l} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \end{array}\right.,$$

   từ đó đưa ra lời kết luận cho bài toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông cân tại A. Tính góc giữa 2 trung tuyến BE, CF.

Giải

Gọi α $(0 < \alpha \le 90^0)$ là góc giữa BE và CF, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{BE}|.|\overrightarrow{CF}|}. \qquad (1)$$

trong đó:

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF})$$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$$

$$= -AB.\frac{AB}{2} - AC.\frac{AC}{2} = -AB^2. \qquad (2)$$

$$BE = CF = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + \frac{AB^2}{4}} = AB.\sqrt{\frac{5}{4}}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A và M là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a., b, c, từ đó suy ra AM và AD.

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2). \qquad (2)$$

- Tính AM, ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (3)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được:

$$AM^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

- Tính AD, ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},\ \frac{ab}{b+c}\overrightarrow{BD} + \frac{ac}{b+c}\overrightarrow{CD} = \vec{0},$$

suy ra:

$$\left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}\right)\overrightarrow{AD} = \frac{ab}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{ac}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (4), ta được:

$$(b + c)^2AD^2 = (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})^2 = b^2AB^2 + c^2AC^2 + 2bc\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= b^2c^2 + c^2b^2 + 2bc.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)] = bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= bc(b+c+a)(b+c-a) = 4bcp(p-a)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC vuông, có cạnh huyền $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm BC. Biết rằng :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}.$$

Tính độ dài AB và AC.

Giải

Từ giả thiết ta được;

$$\frac{a^2}{2}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{2}(AB^2-AC^2)$$

$\Leftrightarrow AB^2-AC^2=a^2$. (1)

Mặt khác theo Pitago, ta được:

$AB^2+AC^2=BC^2=(a\sqrt{3})^2=3a^2$. (2)

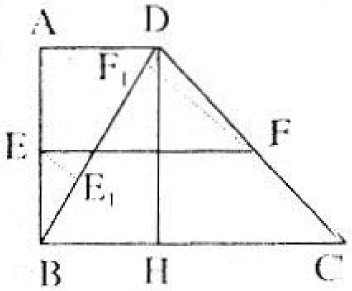
Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), ta được $AB=a\sqrt{2}$, $AC=a$.

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB. Biết rằng:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4,\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=9 \text{ và } \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=6.$$

a. Tính độ dài các cạnh của hình thang.

b. Gọi EF là đường trung bình của hình thang, tính độ dài hình chiếu của EF lên BD.



Giải

a. Ta có:

$$4=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB^2 \Leftrightarrow AB=2.$$

$$9=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}=CB^2 \Leftrightarrow CB=3.$$

$$6=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$$
$$=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}=9-BC.AD=9=3AD$$

$\Leftrightarrow AD=1$.

Trong ΔHCD, ta có:

$CD^2=HC^2+HD^2=(BC-BH)^2+AB^2=(3-1)^2+4=8 \Leftrightarrow CD=2\sqrt{2}$.

b. Ta có:

$$BD.E_1F_1=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{E_1F_1}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}).\frac{1}{2}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(1+3)=2$$

$$\Leftrightarrow E_1F_1=\frac{2}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD, biết:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

Giải

Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}.(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\end{array}\right. \Leftrightarrow \text{ABCD là hình bình hành.}$$

Ví dụ 6: Cho hình bình hành ABCD, biết rằng với mọi điểm M luôn có:

$$MA^2+MC^2=MB^2+MD^2. \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, ta được:

$$2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}. \qquad (2)$$

Bình phương hai vế của (2), ta được:

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})^2=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB})$$

$\Leftrightarrow OA^2=OB^2 \Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow AC=BD \Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, biết $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$, $|\vec{u}-2\vec{v}|=\sqrt{15}$.

a. Tính tích $\vec{u}.\vec{v}$.

☐ 1. ☐ 1/2. ☐ Khác.

b. Xác định k để góc giữa hai vectơ $(\vec{u}+\vec{v})$ và $(k\vec{u}-\vec{v})$ bằng 60^0.

☐ $k=8+3\sqrt{5}$. ☐ $k=8-3\sqrt{5}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, có các cạnh BC=2, CA=4, AB=5. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A và M là trung điểm BC. Tính AM và AD.

Bài tập 3: Cho ΔABC, có các cạnh BC=a, CA=b, AB=c. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A.

a. (Hệ thức Steward): CMR $c^2CM^2=a^2AM^2+b^2BM^2+(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

b. Từ đó suy ra $AD=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD, trên AB lấy điểm P và dựng hình vuông AMNP ở ngoài ABCD. Tính góc giữa DP và CN.

☐ $\alpha=45^0$. ☐ $\alpha=60^0$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD, biết:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}\neq 0, \text{ với } \forall M.$$

Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}$.

b. $k=8+3\sqrt{5}$.

Bài tập 4: $\alpha=45^0$.

BÀI TOÁN 6
ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY VỀ ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biến đổi biểu thức ban đầu về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $AM^2=k>0$, thì M thuộc đường tròn tâm A, bán kính $R=\sqrt{k}$.

Dạng 2: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$, với A, B cố định và k không đổi. Khi đó:

- Gọi I là trung điểm AB, ta được:

$$k=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-IA^2$$
$$\Leftrightarrow IM^2=k+IA^2=k+\frac{AB^2}{4}\overset{Đặt}{=}l.$$

- Khi đó:
  - Nếu l<0 thì M không tồn tại M.
  - Nếu l=0 thì M≡I.
  - Nếu l>0 thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{l}$.

Mở rộng: Nếu ta có $\overrightarrow{MA}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=k$, với A, A_i, $i=\overline{1,n}$ cố định, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ và k không đổi. Khi đó:

- Gọi K là điểm thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{KA_i}=\vec{0}\Rightarrow \text{tồn tại duy nhất điểm cố định K.}$$

- Từ đó:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{MK}=\alpha\overrightarrow{MK}, \text{ với } \alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

- Khi đó ta được:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MK}=\frac{k}{\alpha}.$$

Dạng 3: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=k$, với A, B, C cố định. Khi đó:

- Gọi M_0, A_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, A lên BC, ta được:

$$k=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overline{M_0A_0}.\overline{BC}\Leftrightarrow \overline{M_0A_0}=\frac{k}{\overline{BC}},$$

  có giá trị không đổi và do A_0 cố định nên M_0 cố định.
- Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M_0. Đặc biệt khi k=0 thì M thuộc đường thẳng qua A vuông góc với BC.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC đều, cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{a^2}{4}. \qquad (1)$$

Giải

Gọi O là tâm ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO} \Rightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=3\overrightarrow{MO}^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2+2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA})=9MO^2. \qquad (2)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2\\&=3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\overrightarrow{MO}\\&=3MO^2+a^2. \qquad (3)\end{aligned}$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=3MO^2-\frac{a^2}{2}. \qquad (4)$$

Khi đó (1) được chuyển về dạng:

$$3MO^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow MO^2=\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow MO=\frac{a}{2}$$

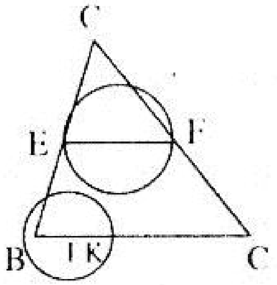
$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$.

b. $2MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=a^2$, với a=BC.

Giải



a. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AB và AC.

Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$2\overrightarrow{ME}.2\overrightarrow{MF}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0 \Leftrightarrow ME\perp MF$

$\Leftrightarrow$ M nhìn EF dưới một góc vuông

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính EF.

b. Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$a^2=2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.(2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}). \qquad (1)$$

Gọi K là điểm thoả mãn:

$$2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KB}+(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC})=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

tức là tồn tại duy nhất điểm K cố định và $KB=\frac{a}{3}$.

Khi đó:

$$2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(2+1)\overrightarrow{MK}=3\overrightarrow{MK}.$$

Từ đó (1) có dạng:

$$a^2=3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MK}.$$

Gọi I là trung điểm BK, ta được:

$$a^2=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK})=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB})=3(MI^2-IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{a^2}{3}+\frac{BK^2}{4}=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{36}=\frac{13a^2}{36}$$

$$\Leftrightarrow MI=\frac{a\sqrt{13}}{6}\Leftrightarrow \text{M thuộc đường tròn tâm I, bán kính } R=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

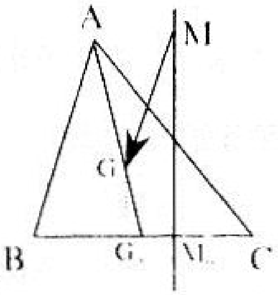
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=a^2-MB^2+MC^2,\ \text{với } a=BC.$$

Giải

Ta biến đổi (1) về dạng:

$$a^2=\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$

$$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}$$



trong đó G là trọng tâm ΔABC, và gọi M_0, G_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, G lên BC, ta được:

$$3\overline{M_0G_0}.\overline{BC}=a^2\Leftrightarrow \overline{M_0G_0}=\frac{a}{3}$$

do G_0 cố định nên M_0 cố định.

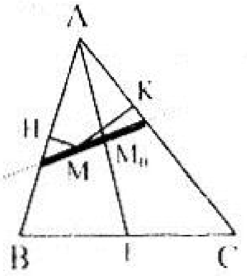
Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M_0.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$, sao cho:

$$AB.AH+AC.AK=AI^2. \qquad (1)$$

trong đó H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Giải



Sử dụng tính chất hình chiếu, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\overrightarrow{AI}^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$$

$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}. \qquad (2)$$

Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên AI, ta được:

$$(2)\Leftrightarrow AI^2=2\overline{AI}.\overline{AM_0}\Leftrightarrow \overline{AM_0}=\frac{AI}{2}$$

⇔ M_0 là trung điểm AI.

Vậy điểm M thuộc đoạn trung trực của AI nằm trong góc $\widehat{BAC}$

Ví dụ 5: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

$$MA^2-MB^2=k. \qquad (1)$$

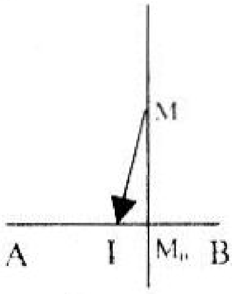
Giải

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi (1) về dạng:

$$k=\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}.$$

Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên AB, ta được:

$$k=\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}=\overline{M_0I}.\overline{BA} \Leftrightarrow \overline{M_0I}=\frac{k}{BA},$$



có giá trị không đổi và do I cố định nên M_0 cố định.

Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với AB tại M_0.

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên, chúng ta đã biết cách giải bài toán:

" Tìm tập hợp điểm M thoả mãn:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2=k, \qquad (1)$$

với A, B cố định, $\alpha+\beta=0$ và k không đổi."

Trong trường hợp $\alpha+\beta \neq 0$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là điểm thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA})+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{IB}=\alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$k=\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$

$$=(\alpha+\beta)MI^2+\alpha IA^2+\beta IB^2+2(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}).\overrightarrow{MI}$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{1}{\alpha+\beta}[k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)] \overset{\text{Đặt}}{=} l.$$

Bước 3: Biện luận:

- Với $l < 0$, không tồn tại điểm M.
- Với $l = 0$, thì $M \equiv I$.
- Với $l > 0$, thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{l}$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

$$3MA^2-2MB^2-MC^2=2l. \qquad (1)$$

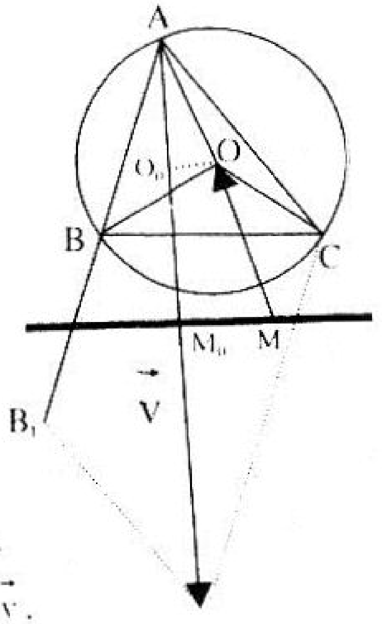
Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=MO^2+OA^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA},$$

$$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2=MO^2+OB^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB},$$

$$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2=MO^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC},$$



từ đó suy ra (1) được biến đổi về dạng:

$$2l = 2\overrightarrow{MO}.(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$
$$= 2\overrightarrow{MO}.[3\overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})]$$
$$= -2\overrightarrow{MO}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (2)$$

Dựng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và gọi M_0, O_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, O lên đường thẳng chứa vectơ $\vec{v}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow l = \overrightarrow{MO}.\vec{v} = \overline{M_0O_0}.v \Leftrightarrow \overline{M_0O_0} = \frac{l}{v}$$

có giá trị không đổi và do O_0 cố định nên M_0 cố định.

Vậy M thuộc đường thẳng qua M_0 vuông góc với $\vec{v}$.

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên, chúng ta đã biết cách giải bài toán:

"*Tìm tập hợp điểm M thoả mãn:*

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k, \qquad (1)$$

với A, B, C cố định, $\alpha+\beta+\gamma=0$ và k không đổi."

Trong trường hợp $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là điểm thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Khi đó tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$k = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2 + \gamma\overrightarrow{IC}^2$$
$$= \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)MI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + 2(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{MI}$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}[k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)] \overset{\text{Đặt}}{=} l.$$

Bước 3: Biện luận:

- Với $l < 0$, không tồn tại điểm M.
- Với $l = 0$, thì $M \equiv I$.
- Với $l > 0$, thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{l}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

b. $4MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$.

c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} = 0$.

d. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + BC^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông cân tại B, $AB = a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$.

b. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) = 0$, với điểm I thoả mãn ABCI là hình vuông.

Bài tập 3: Cho ΔABC đều, cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 0$.

b. $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = a^2$.

Bài tập 4: Cho ΔABC. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = k.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

b. $2MA^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

c. $2MA^2 - MB^2 = k$.

d. $MA^2 + 2MB^2 = k$.

Bài tập 6: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

b. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

c. $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$, sao cho:

$$AB.AK + AC.AH = AI^2.$$

trong đó H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Bài tập 8: Cho hình bình hành ABCD. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k.$$

Bài tập 9: Cho góc xOy. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc đó, sao cho độ dài hình chiếu của đoạn OM lên Ox gấp bốn lần độ dài hình chiếu của đoạn OM lên Oy.

BÀI TOÁN 7

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán cực trị.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng tích vô hướng biến đổi biểu thức cần tìm cực trị về biểu thức độ dài, thí dụ:

$$S = MI^2 + c, \text{ với } c \text{ là hằng số và } I \text{ cố định.}$$

Khi đó $S_{Min} = c$, đạt được khi

$$MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, G là trọng tâm và M là điểm tuỳ ý.

a. CMR $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b. CMR $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$, từ đó suy ra vị trí của M để $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) +$$
$$+ \overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$$
$$= 0, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}, \quad (1)$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}, \quad (2)$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}, \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$MA^2+MB^2+MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + \overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$
$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$MG^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv G.$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD, tâm O, M là điểm tuỳ ý.

a. CMR $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2)$.

b. Giả sử M di động trên đường tròn (d), các định vị trí của M để $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases} => (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})^2$$

$$<=> 0 = MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}) \qquad (1)$$

Ta xét:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM})$$

$$= -(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM})$$

$$= -OA^2 + OM^2 + OB^2 - OM^2 = OB^2 - OA^2. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$0 = MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 + 2(OB^2 - OA^2)$

$<=> MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2)$, dpcm.

b. Từ kết quả câu a) suy ra $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MD^2 nhỏ nhất

<=> M là hình chiếu vuông góc của D lên (d).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC đều cạnh bằng 6, M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt

$$S = MA^2 - MB^2 - MC^2.$$

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của S.

☐ $-2a^2$. ☐ $2a^2$. ☐ Khác.

b. Tìm giá trị lớn nhất của S.

☐ $a^2/3$. ☐ $2a^2/3$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, G là trọng tâm và M là điểm tuỳ ý.

a. CMR vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$, không phụ thuộc vào vị trí của M.

b. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, chứng minh rằng:

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO}.\vec{v}$$

c. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.

d. Giả sử M di động trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, tìm vị trí của M để $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $S_{Min} = -2a^2$ và $S_{Max} = \dfrac{2a^2}{3}$.

BÀI TOÁN 8

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Sử dụng tích vô hướng chứng minh bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha, \text{ với } \alpha = (\vec{a}, \vec{b}),$$

và bởi $|\cos\alpha| \le 1$, do đó $|\vec{a}\,.\,\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\text{Cos}A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Thiết lập các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC, ta được:

$$\overrightarrow{e_1}\,.\,\overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{e_1}|.|\overrightarrow{e_2}|.\cos(180^0 - B) = -\cos B,$$

$$\overrightarrow{e_2}\,.\,\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_2}|.|\overrightarrow{e_3}|.\cos(180^0 - C) = -\cos C,$$

$$\overrightarrow{e_1}\,.\,\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_1}|.|\overrightarrow{e_3}|.\cos(180^0 - A) = -\cos A.$$

Mặt khác ta luôn có:

$$0 \le (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})^2 = \overrightarrow{e_1}^2 + \overrightarrow{e_2}^2 + \overrightarrow{e_3}^2 + 2(\overrightarrow{e_1}\,.\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\,.\,\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}\,.\,\overrightarrow{e_3})$$

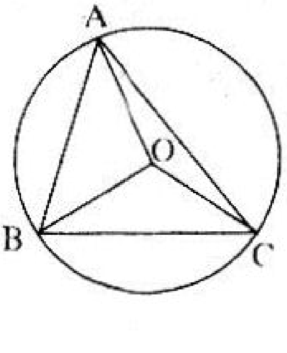
$$= 3 + 2(-\cos B - \cos C - \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}.$$

Giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta nhận được:

$$2A = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}),$$

$$2B = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}),$$

$$2C = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Mặt khác:

$$0<(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=OA^2+OB^2+OC^2+2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$
$$=3R^2+2(R^2.\cos2C+R^2.\cos2A+R^2.\cos2B)$$

$\Leftrightarrow \cos2A+\cos2B+\cos2C\geq -\frac{3}{2}$, đpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. $\cos2A - \cos2B + \cos2C < \frac{3}{2}$.

b. $\cos2A + \cos2B - \cos2C \leq \frac{3}{2}$.

Bài tập 2. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng:

a. $\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2(i-1)\pi}{n}=0$.

b. $\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2(i-1)\pi}{n}=0$.

CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC - TRONG ĐƯỜNG TRÒN

CHỦ ĐỀ 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng:

- Các cạnh là a, b, c.
- Các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c.
- Các đường cao h_a, h_b, h_c.
- Các đường phân giác l_a, l_b, l_c.

ta có các hệ thức sau:

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. ĐỊNH LÝ TRUNG TUYẾN

- $b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$,
- $c^2+a^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}$,
- $a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}$.

4. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Phân giác trong	*Phân giác ngoài*
$l_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,	$l'_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{\lvert b-c\rvert}$,

- $l_B = \dfrac{2ac.\cos\dfrac{B}{2}}{a+c}$.
- $l'_B = \dfrac{2ac.\cos\dfrac{B}{2}}{|a-c|}$.
- $l_C = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$.
- $l'_C = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{|a-b|}$.

5. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH

- $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$.
- $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \dfrac{abc}{4R}$
- $S = pr = p(p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\dfrac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\dfrac{C}{2}$.

  với p là nửa chu vi tam giác, r bán kính đường tròn nội tiếp)
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

6. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

7. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r = \frac{S}{p}.$$

$$r = (p-a)\,\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\,\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\,\text{tg}\frac{C}{2}.$$

BÀI TOÁN 1

ĐỊNH LÝ COSIN TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý cosin trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng với các cạnh là a, b, c. Theo định lý hàm số cosin ta có:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Xác định tính chất góc trong tam giác là nhọn, vuông, tù, dựa trên lập luận:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Khi đó:

- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A > 0 \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow A$ nhọn.
- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A$ vuông.
- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A < 0 \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow A$ tù.

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

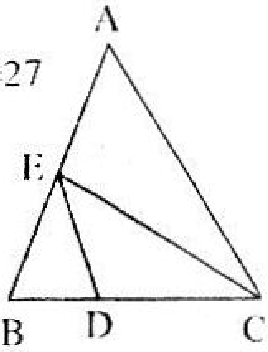
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $AB = 3$, $AC = 6$ và $A = 60^0$. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc BC, AB sao cho $BC = 3BD$, $AE = DE$.

a. Tính độ dài cạnh BC và các góc B, C.

b. Tính độ dài đoạn CE.

Giải



a. Trong ΔABC, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 9 + 36 - 2.3.6.\cos 60^0 = 27$

$\Leftrightarrow BC = 3\sqrt{3}$.

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos C$

$\Leftrightarrow \cos C = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow C = 30^0$.

$A + B + C = 180^0 \Leftrightarrow B = 180^0 - A - B = 90^0$.

Nhận xét: Nếu các em học sinh lưu ý được sau khi tính BC, ta có:

$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại B

thì việc các định số đo các góc B, C sẽ thực sự giản đơn.

b. Trong ΔBDE, ta có:

$$DE^2=BE^2+BD^2=(AB-AE)^2+BD^2=(3-DE)^2+(\sqrt{3})^2=9-6DE+DE^2+3$$

$$\Leftrightarrow DE=2.$$

Trong ΔACE, ta có:

$$CE^2=AE^2+AC^2-2AE.AC.\cos A=4+36-2.2.6.\cos 60^0=28 \Leftrightarrow CE=2\sqrt{7}.$$

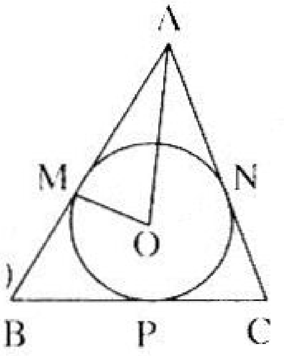
Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết AB+AC=13, AB>AC, $A=60^0$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Giải

Ta có AB = c, AC = b, khi đó từ giả thiết ta được $b + c = 13$. (1)

Gọi M, N, P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, AC, BC. Ta được:

AM = AN, BM = BP và CN = CP.



Trong ΔMAO, ta có:

$$AM = OM.\text{cotg}\frac{A}{2} = \sqrt{3}.\text{cotg}30^0 = 3 = AN.$$

Ta có:

$$BC=BP+PC=BM + CN = (AB - AM) + (AC - AN)$$
$$=(AB + AC) - (AM + AN) = 13 - 6 = 7.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$
$$\Leftrightarrow 49 = c^2 + b^2 - 2cb.\cos 60^0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = 49. \quad (2)$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (1), (2), có dạng:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 - bc = 49 \\ b + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 8 \end{cases}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của ΔABC là a=7, b=5, c=8.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, có AB=$\sqrt{a^2+b^2}$, BC=$\sqrt{b^2+c^2}$, AC=$\sqrt{a^2+c^2}$ với a, b, c là ba độ dài cho trước. Chứng minh rằng ΔABC nhọn.

Giải

Ta có:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2+c^2)=2a^2>0 \Leftrightarrow \text{góc A nhọn.}$$

Tương tự góc B, C nhọn.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, cạnh a, b, c và $A = 60^0$. CMR:

$$b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2).$$

Giải

Ta có:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=b^2+c^2-bc \Leftrightarrow a^2(b+c)=(b+c)(b^2+c^2-bc)$$
$$\Leftrightarrow a^2b+a^2c=b^3+c^3 \Leftrightarrow b^3-a^2b=a^2c-c^3 \Leftrightarrow b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2), \text{đpcm.}$$

Chú ý: Như vậy chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán trên theo chiều ngược lại, tức là:

" *Cho một hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác, hãy xác định số đo góc nói riêng và các yếu tố của tam giác nói chung* ".

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: Tính góc C của ΔABC biết:

$$c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0.$$

Giải

Đặt $t = c^2$, $t > 0$. Khi đó, đẳng thức điều kiện được viết lại dưới dạng phương trình bậc hai theo t như sau:

$$t^2 - 2(a^2 + b^2)t + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0. \qquad (1)$$

ta có

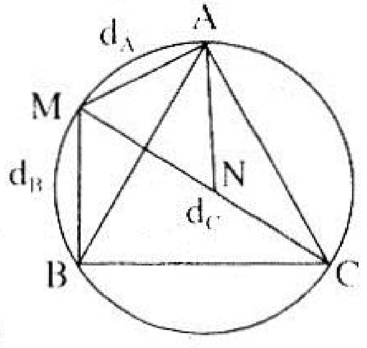
$$\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + b^4) = a^2b^2 > 0$$

do đó phương trình (1) luôncó hai nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} t = a^2 + b^2 - ab \\ t = a^2 + b^2 + ab \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - ab \\ c^2 = a^2 + b^2 + ab \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \cos C = \dfrac{1}{2} \\ \cos C = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} C = 60^0 \\ C = 120^0 \end{array}\right. .$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC đều cạnh bằng a. M là điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$



Giải

Lấy điểm N trên MC sao cho:

$$MA = MN,$$

khi đó ΔAMN là tam giác đều.

Mặt khác ta có nhận xét:

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{MBA} = \widehat{MCA} \text{ chắn 1 cung} \\ \widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 120^0 \end{array}\right. \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC},$$

từ đó suy ra:

$$\Delta MAB = \Delta NAC \Rightarrow MB = NC$$

khi đó:

$$MC = MN + NC = MA + MB.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= MA^2 + MB^2 + (MA + MB)^2 \\ &= 2(MA^2 + MB^2 + MA.MB). \qquad (1) \end{aligned}$$

Trong ΔMAB, ta có:

$$AB^2=MA^2+MB^2-2MA.MB.\cos M <=> a^2=MA^2+MB^2+MA.MB. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$, dpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

a. Tính các góc A, B, C

☐ $A = 60^0, B = 105^0, C = 45^0$ ☐ $A = 60^0, B = 45^0, C = 105^0$

b. Tính đường cao h_a.

☐ $h_a = \sqrt{3} + 1$. ☐ $h_a = \sqrt{3} - 1$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết $AB=3$, $AC=9$ và $A=60^0$. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc BC, AB sao cho $BC=3BD$, $AE=DE$.

a. Tính độ dài cạnh BC, từ đó suy ra cosin các góc B, C.

☐ $BC=3\sqrt{7}$. ☐ $BC=3\sqrt{2}$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài đoạn CE.

☐ $CE=\frac{\sqrt{91}}{3}$. ☐ $CE=\frac{\sqrt{71}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$ và diện tích $S=3\sqrt{3}$. Tính BC.

☐ $BC=\sqrt{13}$. ☐ $BC=\sqrt{37}$. ☐ C tù.

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết $AB+AC=42$, $AB>AC$, $A=120^0$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $2\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

☐ $BC=38$, $CA=32$, $AB=10$. ☐ $BC=36$, $CA=34$, $AB=12$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết

$$b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2).$$

Tính góc A của ΔABC.

☐ $A=60^0$. ☐ $A=120^0$. ☐ C tù.

Bài tập 6: Cho ΔABC có $a=2$, $b=4$, $c=5$. Chứng minh ΔABC có một góc tù.

☐ A tù. ☐ B tù. ☐ C tù.

Bài tập 7: Cho ΔABC có $a^4=b^4+c^4$. Chứng minh ΔABC nhọn.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $A=60^0$, $B=45^0$, $C=105^0$, $h_a=\sqrt{3}+1$.

Bài tập 2: $BC=3\sqrt{7}$, $CE=\frac{\sqrt{91}}{3}$.

Bài tập 3: $BC=\sqrt{13}$ hoặc $BC=\sqrt{37}$.

Bài tập 4: $BC=38$, $CA=32$, $AB=10$.

Bài tập 5: $A=120^0$.

Bài tập 6: C tù.

Bài tập 7: Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} a>b \\ a>c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A>B \\ A>C \end{cases}.$$

Do đó để chứng minh ΔABC nhọn, ta chỉ cần chứng minh góc A nhọn.

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2 \Leftrightarrow (b^2+c^2)^2>a^4 \Leftrightarrow b^4+c^4+2b^2.c^2>a^4$

$\Leftrightarrow a^4+2b^2.c^2>a^4 \Leftrightarrow b^2.c^2>0$, luôn đúng.

Vậy ΔABC nhọn

BÀI TOÁN 2

ĐỊNH LÝ SIN TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý sin trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng với các cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Dựa vào kết quả trên ta có thể giải được các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính đường cao h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}bc.\sin A \Leftrightarrow h_a = \frac{b.c.\sin A}{a}. \quad (1)$$

trong đó b, c đã biết và:

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin A=\frac{4}{5}, \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 49 = 25 - 2.7.5.\frac{3}{5} =32 \Rightarrow a=4\sqrt{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $h_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết $A = \alpha$, $0 < \alpha < 90^0$, độ dài đường cao đỉnh CD = h và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng R. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

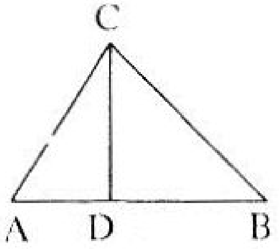
Trong ΔABC, ta có $\frac{BC}{\sin A}=2R \Leftrightarrow BC=2R.\sin\alpha$.

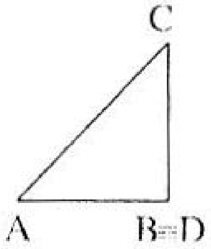
Trong ΔACD, ta có

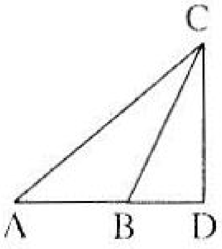
$$AC = \frac{CD}{\sin A} = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad AD = CD.\text{cotg}\alpha = h.\text{cotg}\alpha$$

Trong ΔBCD, ta có:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = 4R^2.\sin^2\alpha - h^2 \Leftrightarrow BD = \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$







Để tính AB, ta cần phân biệt ba trường hợp:

- Nếu D ở trong đoạn AB, thì

$$AB{=}AD{+}DB{=}\ h.\text{cotg}\alpha + \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$

- Nếu D≡B, thì

$$AB = AD = h.\text{cotg}\alpha.$$

- Nếu D ở trong đoạn AB, thì

$$AB = AD - DB = h.\text{cotg}\alpha - \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$

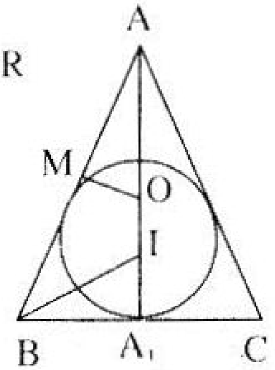
Chú ý: Sai lầm mà các em học sinh thường gặp phải là khi tính độ dài đoạn AB, như vậy trong trường hợp tường minh ta cần lựa chọn được một trong các dạng trên.

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân tại A, biết B = C = α, AI = m với I là đường tròn nội tiếp tam giác.

a. Tính độ dài cạnh BC

b. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR

$$2R\sin\alpha = m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$



Giải

a. Trong ΔIAB, ta có:

$$\frac{AB}{\sin \widehat{AIB}} = \frac{AI}{\sin \widehat{ABI}}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{m.\sin(90^0 + \frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{m.\sin[180^0 - (90^0 - \frac{\alpha}{2})]}{\sin\frac{\alpha}{2}} = m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Trong ΔA_1AB, ta có:

$$BC = 2BA_1 = 2AB.\cos\alpha = 2m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.\cos\alpha.$$

b. Gọi M là trung điểm AB, trong ΔMAO, ta có:

$$R = OA = \frac{AM}{\sin \widehat{AOM}} = \frac{\frac{AB}{2}}{\sin\alpha} = \frac{m.\cot g\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha} \Leftrightarrow 2R\sin\alpha = m.\cot g\frac{\alpha}{2}$$, đpcm.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết:

$$\frac{A.\sin A + B.\sin B}{A+B} + \frac{B.\sin B + C.\sin C}{B+C} + \frac{C.\sin C + A.\sin A}{C+A}$$
$$= \sin A + \sin B + \sin C.$$

CMR ΔABC đều.

Giải

Sử dụng định lý hàm số sin trong ΔABC, ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\frac{A.\frac{a}{2R} + B.\frac{b}{2R}}{A+B} + \frac{B.\frac{b}{2R} + C.\frac{b}{2R}}{B+C} + \frac{C.\frac{c}{2R} + A.\frac{c}{2R}}{C+A} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A.a + B.b}{A+B} + \frac{B.b + C.c}{B+C} + \frac{C.c + A.a}{C+A} = a + b + c. \qquad (1)$$

Trong ΔABC đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, do đó:

$$(A - B)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow A.a + B.b \geq A.b + B.a$$

$$\Leftrightarrow 2(A.a + B.b) \geq A.b + B.a + A.a + B.b = (A + B)(a + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A.a + B.b}{A+B} \geq \frac{1}{2}(a+b). \qquad (2)$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{B.b + C.c}{B+C} \geq \frac{1}{2}(b+c). \qquad (3)$$

$$\frac{C.c + A.a}{C+A} \geq \frac{1}{2}(c+a). \qquad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3), (4), ta được:

$$\frac{A.a + B.b}{A+B} + \frac{B.b + C.c}{B+C} + \frac{C.c + A.a}{C+A} \geq a+b+c. \qquad (5)$$

Vậy (1) có được khi dấu "=" xảy ra tại (5)

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $b = 3$, $c = 5$, $\cos A = \frac{4}{5}$.

a. Tính đường cao h_a.

☐ $h_a = \frac{9}{\sqrt{10}}$. ☐ $h_a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. ☐ Khác.

b. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

☐ $R = \frac{5\sqrt{10}}{6}$. ☐ $R = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, AB=1, AC=4. Gọi M là trung điểm AC.

Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.

☐ $R = \frac{\sqrt{75}}{2}$. ☐ $R = \frac{\sqrt{85}}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết $A = 60^0$, độ dài đường cao đỉnh $CD = \sqrt{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

☐ $a=5\sqrt{3}$, $b=2$, $c=6\sqrt{2}+1$. ☐ $a=5\sqrt{3}$, $b=2$, $c = 6\sqrt{2}-1$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết BC = 2. Phân giác BB_1 thoả mãn $BB_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $B_1C = 1$. Tính diện tích ΔABC

☐ $S = \frac{5\sqrt{7}}{8}$. ☐ $S = \frac{15\sqrt{7}}{16}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC có $a: b: c = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

a. Tính các góc của ΔABC

☐ $A = 120^0$, $B = 45^0$, $C = 15^0$. ☐ $A = 60^0$, $B = 45^0$, $C = 75^0$.

b. Cho $a=2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

☐ R=3. ☐ R=2. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC, có độ dài ba cạnh bằng a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. CMR ΔABC nhọn khi và chỉ khi:

$$a^2+b^2+c^2>8.$$

Bài tập 7: Cho ΔABC. Lấy điểm D trên BC sao cho BD=3CD. Đường tròn qua B, D và tiếp xúc với đường thẳng AC có bán kính R. CMR:

$$R=\frac{b(5-4\cos C).\sin A}{8\sin(A+C).\sin C}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $h_a=\frac{9}{\sqrt{10}}$, $R=\frac{5\sqrt{10}}{6}$.

Bài tập 2: $R=\frac{\sqrt{85}}{2}$.

Bài tập 3: $BC=5\sqrt{3}$, $CA=2$, $AB=6\sqrt{2}+1$.

Bài tập 4: $S=\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

Bài tập 5: $A=120^0$, $B=45^0$, $C=15^0$ và R=2.

BÀI TOÁN 3

ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý đường trung tuyến và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và m_a, m_b, m_c theo thứ tự là các trung tuyến xuất phát từ đỉnh A, B, C. Theo định lý đường trung tuyến ta có:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2};\quad c^2+a^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2};\quad a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}.$$

Ngoài ra các em học sinh cũng cần nhớ thêm hệ thức:

$$AB^2-AC^2=2\overline{BC}.\overline{IH},$$

với I là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên BC.

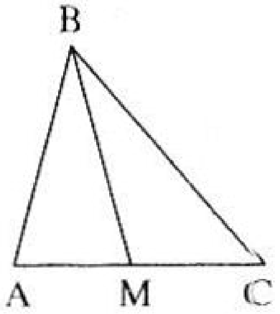
Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.
Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.
Dạng 3: Nhận dạng tam giác.
Dạng 4: Quĩ tích.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có AB=5, AC=6, BC=7. Gọi trung điểm của AC là M. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

Giải



Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔABM, ta có:

$$R_{ABM}=\frac{BM}{2\sin A}. \qquad (1)$$

Trong ΔABC, ta có:

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow BM^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+BC^2-\frac{AC^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(25+49-18)=28 \Leftrightarrow BM=2\sqrt{7}. \qquad (2)$$

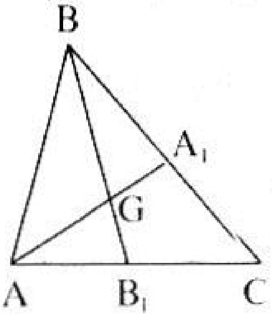
$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{1}{5} \Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R_{ABM}=\frac{5\sqrt{42}}{12}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, các trung tuyến $AA_1=3$, $BB_1=6$ và hợp với nhau một góc 60^0. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Giải



Vì AA_1, BB_1 hợp với nhau một góc 60^0, do đó ta cần xét hai trường hợp là $\widehat{AGB}=60^0$ và $\widehat{AGB}=120^0$.

Trường hợp 1: Nếu $\widehat{AGB}=60^0$.

Trong ΔGAB, ta có:

$$AB^2=GA^2+GB^2-2GA.GB.\cos\widehat{AGB}=12 \Rightarrow AB=2\sqrt{3}.$$

Trong ΔGA_1B, ta có:

$$\frac{1}{4}BC^2=A_1B^2=GA_1^2+GB^2-2GA_1.GB.\cos\widehat{A_1GB}=21 \Rightarrow BC=2\sqrt{21}.$$

Trong ΔGAB_1, ta có:

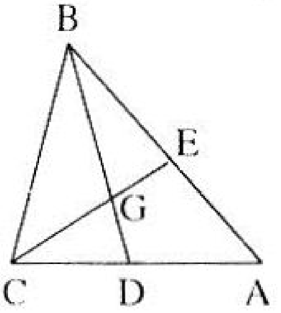
$$\frac{1}{4}AC^2=AB_1^2=GA^2+GB_1^2-2GA.GB_1.\cos\widehat{AGB_1}=12 \Rightarrow AC=4\sqrt{3}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\widehat{AGB}=120^0$ - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 3: Cho ΔABC không cân tại đỉnh A, trung tuyến BD và CE, có các cạnh a, b, c. CMR:

a. $AB^2.CE^2-AC^2.BD^2=\dfrac{(c^2-b^2)(c^2+b^2-2a^2)}{4}$.

b. $AB.CE=AC.BD \Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2$.



Giải

a. Áp dụng định lý trung tuyến, ta có:

$$CE^2=\frac{1}{2}(CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{2})=\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{c^2}{2})$$

$$BD^2=\frac{1}{2}(BA^2+BC^2-\frac{AC^2}{2})=\frac{1}{2}(a^2+c^2-\frac{b^2}{2})$$

suy ra:

$$AB^2.CE^2-AC^2.BD^2=\frac{1}{4}c^2(2a^2+2b^2-c^2)-\frac{1}{4}b^2(2a^2+2c^2-b^2).$$

$$=\frac{1}{4}[2(c^2-b^2)a^2+b^4-c^4]=\frac{1}{4}(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)$$

b. Ta có:

$$AB.CE=AC.BD \Leftrightarrow AB^2.CE^2-AC^2.BD^2=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)=0 \Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2.$$

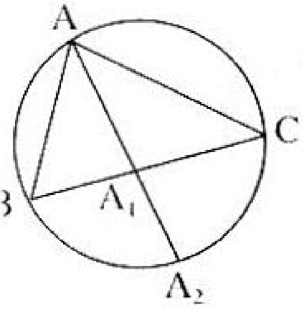
Ví dụ 4: Cho ΔABC, các trung tuyến AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\le\frac{9}{4}.$$

Giải

Tứ giác ABA_2C nội tiếp đường tròn, do đó:

$$AA_1.A_1A_2=BA_1.A_1C=\frac{a^2}{4}.$$



Ta có:

$$AA_1.AA_2=AA_1.(AA_1+A_1A_2)=AA_1^2+AA_1.A_1A_2$$

$$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{a^2}{2})+\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}.$$

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AA_1^2}{AA_1.AA_2}=\frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{a^2}{2})}{\frac{b^2+c^2}{2}}=1-\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}. \qquad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{BB_1}{BB_2}=1-\frac{b^2}{2(a^2+c^2)};\quad \frac{CC_1}{CC_2}=1-\frac{c^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}=3-\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right]. \qquad (4)$$

Ta đi chứng minh $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}$.

Thật vậy:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}=1+\frac{a^2}{b^2+c^2}+1+\frac{b^2}{a^2+c^2}+1+\frac{c^2}{a^2+b^2}-3$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)]\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$

$$\overset{Cosi}{\ge}\frac{1}{2}.3.\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}.3.\frac{1}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}}-3$$

$$=\frac{3}{2}. \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

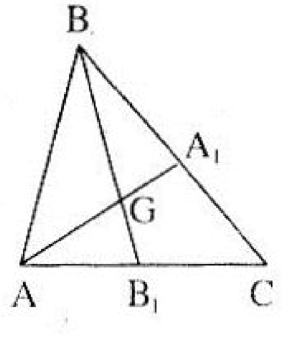
$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\le 3-\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{9}{4},\text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC có các cạnh a, b, c thoả mãn
$5c^2=a^2+b^2$.

CMR ΔABC có hai trung tuyến AA_1 và BB_1 vuông góc với nhau.

Giải

Ta đi chứng minh ΔGAB vuông tại G, ta có:



$$GA^2=\left(\frac{2}{3}AA_1\right)^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2).$$

$$GB^2=\left(\frac{2}{3}BB_1\right)^2=\frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2).$$

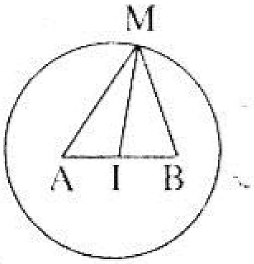
Suy ra:

$$GA^2+GB^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+4c^2)=\frac{1}{9}(5c^2+4c^2)=c^2=AB^2$$

$\Leftrightarrow \Delta GAB$ vuông tại G $\Leftrightarrow AA_1\perp BB_1$, đpcm.

Ví dụ 6: Cho đoạn AB=a cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$MA^2+MB^2=\frac{5a^2}{2}. \qquad (1)$$



Giải

Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}=2MI^2+\frac{a^2}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $2MI^2+\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI^2=a^2 \Leftrightarrow MI=a$.

Vậy tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính R=a.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có AB=5, AC=6, BC=7. Gọi trung điểm của AC là M. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

☐ $R_{ABM}=\frac{9\sqrt{7}}{14}$. ☐ $R_{ABM}=\frac{\sqrt{7}}{12}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, các trung tuyến $BB_1=6$, $CC_1=9$ và hợp với nhau một góc 120^0. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

☐ $a=2\sqrt{19}$, $b=4\sqrt{7}$, $c=2\sqrt{13}$. ☐ $a=2\sqrt{7}$, $b=2\sqrt{34}$, $c=2\sqrt{19}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC có BC=3, AC=4, hai trung tuyến AA_1 và BB_1 vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB=\sqrt{5}$. ☐ $AB=\sqrt{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Bài tập 5: Cho ΔABC có cạnh a, b, c và các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh B, C là m_b, m_c thoả mãn $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$

Chứng minh rằng $b^2-c^2=2a^2$ từ đó suy ra 2cotgA=cotgB+cotgC

Bài tập 6: Cho ΔABC có ba trung tuyến m_a, m_b, m_c thoả mãn:

$$m_a^2+m_b^2=5m_c^2.$$

Chứng minh rằng ΔABC có hai trung tuyến vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho đoạn AB = 4 cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

a. $MA^2+MB^2=40$. b. $MA^2-MB^2=8$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $R_{ABM}=\frac{9\sqrt{7}}{14}$.

Bài tập 2: Ta có hai đáp số:

$a=2\sqrt{19}$, $b=4\sqrt{7}$, $c=2\sqrt{13}$

hoặc $a=2\sqrt{7}$, $b=2\sqrt{34}$, $c=2\sqrt{19}$.

Bài tập 3: $AB=\sqrt{5}$.

BÀI TOÁN 4

ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và h_a, h_b, h_c theo thứ tự là các đường cao xuất phát từ đỉnh A, B, C. Dựa trên các công thức tính diện tích:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

chúng có thể xác định được độ dài của đường cao hoặc ngược lại.

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

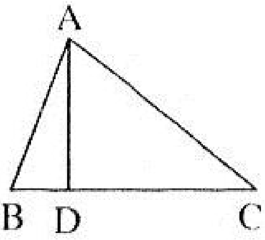
Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết AB = 2, BC = 3, CA = 4, đường cao AD. Tính độ dài đoạn CD.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}BC.AD = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$



Trong ΔACD, ta có:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{7}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn, đường cao AH và trung tuyến BE thoả mãn AH = BE.

a. Tính số đo góc $\widehat{CBE}$.

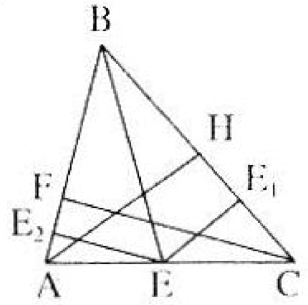
b. Giả sử AH là đường cao lớn nhất của ΔABC. Xác định dạng của ΔABC để $B = 60^0$.

Giải

a. Dựng $EE_1//AH$, trong ΔE_1BE, ta có:

$$\sin C\hat{B}E = \sin E_1\hat{B}E = \frac{EE_1}{EB} = \frac{\frac{AH}{2}}{EB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}E = 30^0.$$

b. Dựng đường cao CF và EE_2//CF, trong ΔE_2BE, ta có:



$$\sin A\hat{B}E = \sin E_2\hat{B}E = \frac{EE_2}{EB}$$

$$= \frac{\frac{CF}{2}}{EB} \le \frac{\frac{AH}{2}}{EB} = \frac{1}{2}$$

⇔ $C\hat{B}E \le 30^0$.

Suy ra

$B = C\hat{B}E + A\hat{B}E = 30^0 + A\hat{B}E \le 30^0 + 30^0 = 60^0$. (1)

Vậy để $B=60^0$ điều kiện là dấu "=" xảy ra tại (1)

⇔ AH=CF ⇔ ΔABC cân.

Ngoài ra ta có $B = 60^0$ do đó ΔABC đều.

Ví dụ 3: Cho ΔABC nhọn, trực tâm H, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \ge 6,$$

khi nào dấu "=" xảy ra.

Giải

Biến đổi VT của bất đẳng thức về dạng:

$$VT = \frac{AA_1 - A_1H}{A_1H} + \frac{BB_1 - B_1H}{B_1H} + \frac{CC_1 - C_1H}{C_1H}$$

$$= \frac{AA_1}{A_1H} + \frac{BB_1}{B_1H} + \frac{CC_1}{C_1H} - 3 = \frac{\frac{1}{2}a.AA_1}{\frac{1}{2}a.A_1H} + \frac{\frac{1}{2}b.BB_1}{\frac{1}{2}b.B_1H} + \frac{\frac{1}{2}c.CC_1}{\frac{1}{2}c.C_1H} - 3$$

$$= \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HAB}} - 3$$

$$= \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HCA}} + $$

$$+ \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}} - 3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + 1 + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}} + 1\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) - 3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}}\right)$$

$$\overset{Cosi}{\ge} 2+2+2=6, \text{ dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $AB=3$, $BC=4$, $CA=2$, đường cao BD. Tính độ dài đoạn CD.

☐ $CD=\frac{11}{4}$. ☐ $CD=\frac{9}{4}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2 và B_2 sao cho $A_1A_2=B_1B_2$. CMR ΔABC cân.

Bài tập 3: Cho ΔABC, diện tích bằng S, các đường cao h_a, h_b, h_c. CMR ΔABC đều khi và chỉ khi:

$$S=\frac{1}{6}(a.h_b+b.h_c+c.h_a).$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC có $b + c = 2a$. Chứng minh rằng:

a. $\sin B + \sin C = 2\sin A$

b. $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. CMR AA_1, BB_1, CC_1 là phân giác của $\Delta A_1B_1C_1$.

Lưu ý: Bài toán này rất cơ bản, ta còn gặp lại trong phần chu vi của tam giác.

Bài tập 7: Cho hai điểm A, B cố định. Tìm quĩ tích các điểm M sao cho $BH = MC$, với H là hình chiếu vuông góc của B lên AM.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $CD = \frac{11}{4}$.

Bài tập 2: Gọi H là trực tâm ΔABC, ta có:

$A_1A_2=A_1H$ & $B_1B_2=B_1H$,

$\Rightarrow HA_1=HB_1 \Rightarrow \Delta HA_1C=\Delta HB_1C \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BCH}$.

Vậy CH vừa là đường cao, vừa là đường phân giác $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Bài tập 3: Ta biến đổi hệ thức giả thiết về dạng:

$$S=\frac{1}{6}(a.h_b+b.h_c+c.h_a)=\frac{1}{6}(b.h_b.\frac{a}{b}+c.h_c.\frac{b}{c}+a.h_a.\frac{c}{a})=\frac{S}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3. \qquad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3.$$

Do đó (1) xảy ra khi:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI TOÁN 5

ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

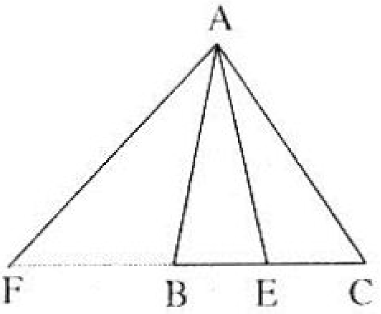
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường phân giác của tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và l_A, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh A, B, C. Theo định lý đường phân giác ta có:

Phân giác trong	*Phân giác ngoài*
▪ $l_A=\dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,	▪ $l'_A=\dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{\lvert b-c\rvert}$,
▪ $l_B=\dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$,	▪ $l'_B=\dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{\lvert a-c\rvert}$,
▪ $l_C=\dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.	▪ $l'_C=\dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{\lvert a-b\rvert}$.



Ngoài ra các em học sinh cũng cần nhớ thêm hệ thức:

$$\frac{EB}{EC}=\frac{FB}{FC}=\frac{AB}{AC},$$

với E, F theo thứ tự là chân đường phân giác trong và ngoài kẻ từ đỉnh A.

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.
Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.
Dạng 3: Nhận dạng tam giác.
Dạng 4: Giải bài toán quỹ tích.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xác định số đo của góc A của ΔABC, biết:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_A}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$l_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_A}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2}=60^0 \Leftrightarrow A=120^0.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC không cân tại đỉnh A, trung tuyến BD và CE, có các cạnh a, b, c. Gọi AF ($F \in BC$) là đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$AF = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\,.$$

Giải

Theo tính chất của đường phân giác trong, ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{FB}{FB+FC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow FB = \frac{ac}{b+c}\,.$$

Áp dụng công thức hàm số cosin đối với ΔABF, ta có:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB.BF.\cos B$$

$$= c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2c.\frac{ac}{b+c}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - \frac{c(a^2+c^2-b^2)}{b+c}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a) = \frac{bcp(p-a)}{(b+c)^2} \Rightarrow AF = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\,.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và l_A, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh A, B, C. CMR:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C}\,.$$

Giải

Ta có nhận xét $0 < \frac{A}{2} < 90^0$ do đó $0 < \cos\frac{A}{2} < 1$, từ đó với:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_A} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \qquad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{1}{l_B} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right). \qquad (2)$$

$$\frac{1}{l_C} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 4: Cho hai điểm cố định A, B trên đường tròn (C), điểm C di động trên đường tròn này. Tìm tập hợp tâm I đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Ta có:

$$\widehat{AIB} = 180^0 - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = 90^0 + \frac{C}{2}\,.$$

Vì C di động trên đường tròn (C) chắn cung AB cố định nên góc C không đổi. Vậy tập hợp điểm I thuộc đường tròn nhìn AB dưới một góc bằng $90^0 + \frac{C}{2}$, ngoại trừ hai điểm A, B (do đó nó thuộc hai cung tròn trên đường tròn này).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $a=\sqrt{6}$, $b=2$, $c=\sqrt{3}+1$. Tính độ dài:

a. Đường phân giác trong của góc A.

☐ $l_A=3$. ☐ $l_A=2$. ☐ Khác.

b. Đường phân giác ngoài của góc A.

☐ $l'_A=6+4\sqrt{3}$. ☐ $l'_A=4\sqrt{3}-6$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại C, AD là đường phân giác trong của góc A, $BD=a$, $CD=b$, biết $a>b$.

a. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB = a.\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. ☐ $AB = a.\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài cạnh AC.

☐ $AC = b.\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. ☐ $AB = b.\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$. ☐ Khác.

c. Tính độ dài cạnh BC.

☐ $BC = a - b$. ☐ $BC = a + b$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Xác định số đo của góc A của ΔABC, biết:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_A.\sqrt{3}}.$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết $B = 12^0$, $C = 132^0$. So sánh độ dài phân giác ngoài của góc B và C.

Bài tập 5: Cho ΔABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Gọi CL và CM theo thứ tự là phân giác trong và ngoài của góc C thoả mãn $CL = CM$. Chứng minh rằng $AC^2 + BC^2 = 4R^2$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, trọng tâm G và $b \geq c$. Phân giác góc A cắt trung tuyến xuất phát từ B và C theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng:

a. $MN \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b-c}{b+c}\right).l_A$.

b. $\dfrac{GM.GN}{MN}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{(b-c).m_b.m_c}{(b+c).l_A}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A, với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh B, C. CMR:

a. $4a^2.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = l_B.l_C$.

b. $2IB.IC = l_B.l_C$, với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $l_A = 2, l'_A = 6 + 4\sqrt{3}$.

Bài tập 2: $AB = a.\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$, $AC = b.\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$, $BC = a + b$.

Bài tập 3: $A = 60^0$.

Bài tập 4: $l'_B = l'_C$.

Bài tập 5: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu B tù.

Nhận xét rằng:

$LCM = 90^0$ và từ giả thiết ta có $CLM = 45^0$.

Từ đó, suy ra trong ΔABC ta có $A = B - 90^0$.

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta có:

$A_1AC = (180^0 - AA_1C) - ACA_1 = B - 90^0 = A \Rightarrow CA_1 = BC$.

Từ đó:

$4R^2 = A_1A^2 = AC^2 + A_1C^2 = AC^2 + BC^2$, đpcm.

Trường hợp 2: Nếu B vuông hoặc nhọn – *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

BÀI TOÁN 6

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Đường tròn tròn ngoại tiếp tam giác - Bán kính.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C và bán kính đường tròn ngoại tiếp R, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

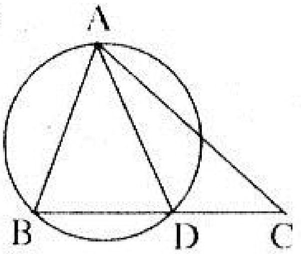
Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới đường tròn ngoại tiếp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, có $AC = 6$, $AB = 3$. Đường tròn (C) bán kính bằng 5 đi qua hai điểm A, B và cắt BC tại D. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

Giải

Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD, ta có:



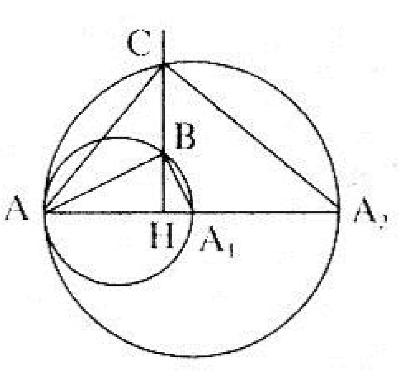
$$R_1 = \frac{AC}{2\sin ADC} = \frac{AC}{2\sin(180^0 - ADB)}$$

$$= \frac{AC}{2\sin ADB} = \frac{AC}{2.\frac{AB}{2R_{\Delta ABD}}} = \frac{6}{2.\frac{3}{2.5}} = 10.$$

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (I_1), (I_2) có bán kính bằng 2, 8 tiếp xúc trong với nhau tại A. Nửa đường thẳng vuông góc với I_1I_2 cắt (I_1), (I_2) theo thứ tự tại B, C. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải

Trong ΔABC, ta có:



$$R = \frac{AB}{2\sin ACB}. \quad (1)$$

Trong đường tròn (I_1), ta có:

$$AB^2 = AA_1.AH = 4AH. \quad (2)$$

Trong đường tròn (I_2), ta có:

$$AC^2 = AA_2.AH = 16AH. \quad (3)$$

Trong ΔHAC, ta có:

$$\sin \widehat{ACB} = \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{4\sqrt{AH}} = \frac{\sqrt{AH}}{4}. \qquad (4)$$

Thay (2), (4) vào (1), ta được:

$$R = \frac{2\sqrt{AH}}{2.\frac{\sqrt{AH}}{4}} = 4.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB=4, AC=5. Gọi M là trung điểm AB. Tính bán kính R_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.

☐ $R_1=\frac{\sqrt{1189}}{10}$. ☐ $R_1=\frac{7}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC có $\widehat{B}=60^0$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 2. Tính bán kính R_1 của đường tròn qua A, C và tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC.

☐ $R_1=3$. ☐ $R_1=2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, có AC=b, AB=c. Đường tròn (C) bán kính bằng R đi qua hai điểm A, B và cắt BC tại D. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

☐ $R_1=\frac{R.b}{c}$. ☐ $R_1=\frac{2R.b}{c}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho hai đường tròn (I_1), (I_2) có bán kính bằng R_1, R_2 tiếp xúc trong với nhau tại A. Nửa đường thẳng vuông góc với I_1I_2 cắt (I_1), (I_2) theo thứ tự tại B, C. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R=2\sqrt{R_1.R_2}$. ☐ $R=\sqrt{R_1.R_2}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại C và đường cao CD=h. Gọi K, L theo thứ thứ là hình chiếu vuông góc của D lên AC, BC.

a. CMR tứ giác AKLB nội tiếp được.

b. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKLB cắt CD tại P, Q.

- Tính độ dài DP.

☐ $DP=\frac{(\sqrt{5}-1)h}{2}$. ☐ $DP=\frac{(\sqrt{5}+1)h}{2}$. ☐ $DP=\frac{3}{4}$.

- Tính độ dài DQ.

☐ $DQ=\frac{(\sqrt{5}-1)h}{2}$. ☐ $DQ=\frac{(\sqrt{5}+1)h}{2}$. ☐ $DQ=\frac{3}{4}$.

Bài tập 6: Tìm bộ ba số a, b, $c \in N$ là độ dài ba cạnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 3, 125.

☐ (5, 5, 7). ☐ (5, 5, 6). ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho ΔABC, có các cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Xác định dạng của ΔABC (nhọn, vuông, tù) tuỳ thuộc vào dấu của biểu thức:

$$T = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2.$$

Bài tập 8: Cho đường tròn (C) cố định. Tìm tam giác nội tiếp trong (C) có tổng bình phương các cạnh lớn nhất.

Bài tập 9: Cho ΔABC, điểm M bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, chứng minh rằng tổng:

$$T = MA^4 + MB^4 + MC^4$$

là đại lượng không đổi.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $R_1 = 2$.

Bài tập 2: $R_1 = \frac{R.b}{c}$.

Bài tập 3: $R = \sqrt{R_1.R_2}$.

Bài tập 4: $DP = \frac{(\sqrt{5} - 1)h}{2}$, $DQ = \frac{(\sqrt{5} + 1)h}{2}$.

Bài tập 5: (5, 5, 6).

Bài tập 6: Ta có:

- Nếu $T>0$ thì ΔABC nhọn.
- Nếu $T=0$ thì ΔABC vuông.
- Nếu $T<0$ thì ΔABC tù.

Bài tập 7: Tam giác đều.

BÀI TOÁN 7

ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C và bán kính đường tròn ngoại tiếp R, ta có:

$$r = \frac{S}{p}.$$

$$r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$= \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới đường tròn nội tiếp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, có AB = 3, AC = 6, $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính bán kính đường tròn cắt cả 3 cạnh của ΔABC và chắn trên mỗi cạnh 1 dây có độ dài bằng 2.

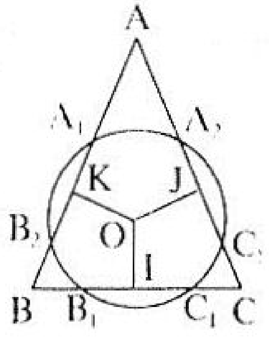
Giải

Gọi O là tâm đường thẳng cần xác định, và I, J, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O lên BC, CA, AB.

Từ giả thiết:

$B_1C_1 = C_2A_2 = A_1B_2 \Leftrightarrow OI = OJ = OK$

$\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC



Khi đó bán kính R của đường tròn cần xác định được cho bởi:

$$R^2 = OB_1^2 = IB_1^2 + OI^2. \quad (1)$$

Ta có:

$$IB_1 = \frac{B_1C_1}{2} = 1. \quad (2)$$

$$a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 9 + 36 - 2.3.6.\cos 60^0 = 27$$

$$OI = r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b+c-a)\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(6+3-3\sqrt{3})\text{tg}30^0 = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R^2=\frac{20-9\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{40-18\sqrt{3}}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

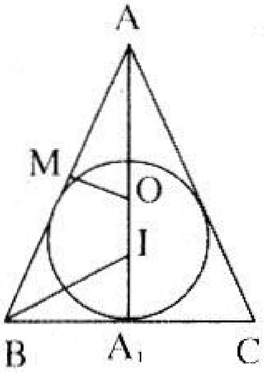
$$r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Giải

Trong ΔIBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{a}{\sin BIC}=\frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a}{\sin(90^0-\frac{A}{2})}=\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow IB=\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \qquad (1)$$



Mặt khác ta lại có:

$$IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \Leftrightarrow r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \text{ dpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC có độ dài các đường cao h_a, h_b, h_c, độ dài các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c, R và r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. CMR:

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le\frac{r+R}{r},$$

dấu "=" xảy ra khi nào ?

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$m_a=AA_1\le OA+OA_1=R+OA_1 \Rightarrow \frac{m_a}{h_a}\le\frac{R}{h_a}+\frac{OA_1}{h_a}. \qquad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{m_b}{h_b}\le\frac{R}{h_b}+\frac{OB_1}{h_b}. \qquad (2)$$

$$\frac{m_c}{h_c}\le\frac{R}{h_c}+\frac{OC_1}{h_c}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le R\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+\frac{OA_1}{h_a}+\frac{OB_1}{h_b}+\frac{OC_1}{h_c}. \quad (4)$$

Gọi S là diện tích ΔABC, ta lại có:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{a.h_a}+\frac{b}{b.h_b}+\frac{c}{c.h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}. \quad (5)$$

$$\frac{OA_1}{h_a}+\frac{OB_1}{h_b}+\frac{OC_1}{h_c}=\frac{a.OA_1}{a.h_a}+\frac{b.OB_1}{b.h_b}+\frac{c.OC_1}{c.h_c}$$

$$=\frac{2S_{\Delta OBC}+2S_{\Delta OCA}+2S_{\Delta OAB}}{2S}=1. \quad (6)$$

Thay (5), (6) vào (4), ta được:

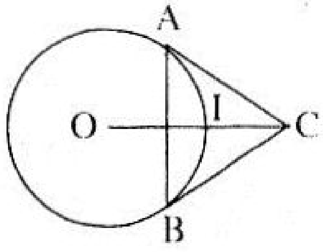
$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le\frac{R}{r}+1=\frac{r+R}{r}, \text{ dpcm.}$$

- Dấu "=" xảy ra
  - ⇔ dấu "=" xảy ra tại (4)
  - ⇔ dấu "=" xảy ra tại (1), (2) và (3)
  - ⇔ O thuộc AA_1, BB_1, CC_1
  - ⇔ ΔABC đều.

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O), A là điểm cố định trên (O), còn B là điểm di động trên (O). Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Gọi I là giao điểm của OC với (O), ta có ngay AI là phân giác góc A, từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



Vậy tập hợp tâm I thuộc đường tròn (C), ngoại trừ bốn điểm A, A_1, A_2, trong đó A_1A_2 là đường kính vuông góc với OA.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, có AB=2, AC=3, BC=4. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

☐ $r=\frac{\sqrt{13}}{5}$. ☐ $r=\frac{\sqrt{15}}{6}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, có BC = a, $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$. Tính bán kính đường tròn cắt cả 3 cạnh của ΔABC và chắn trên mỗi cạnh một dây có độ dài bằng d.

☐ $R=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$. ☐ $R=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông, biết $ABC = \alpha$.

a. Tính tỷ số bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp theo α

☐ $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \frac{\alpha}{2})}$.
☐ $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2})}$.

b. Xác định α để tỷ số trên nhỏ nhất.

☐ $\alpha = 45^0$.
☐ $\alpha = 65^0$.
☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại C. CMR:

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \le \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thoả mãn $a+c=2b$. CMR:

a. $r=\frac{h_b}{3}$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp, h_b là độ dài đường cao đỉnh B.

b. GI//AC, với G, I theo thứ tự là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

c. Phân giác trong của góc B vuông góc với OI, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d. Tổng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên l_B đến các cạnh của tam giác bằng một hằng số.

e. Tứ giác AMIN nội tiếp, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

Bài tập 6: (***Công thức Euler***): Cho ΔABC, O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác, theo thứ tự có bán kính bằng R, r. CMR:

$$OI^2 = R^2 - 2R.r.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $r=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Bài tập 2: $R=\sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$.

Bài tập 3: $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2})}$, $\alpha = 45^0$.

BÀI TOÁN 8

CHU VI TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C, ta có:

$$p = \frac{S}{r},$$

$$p = a + r.\text{cotg}\frac{A}{2} = b + r.\text{cotg}\frac{B}{2} = c + r.\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

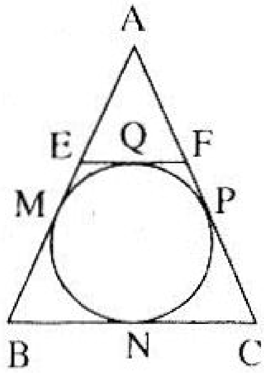
Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới chu vi.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết BC = 6. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính chu ΔABC, biết EF = 2.

Giải



Ta có hai ΔAEF và ΔABC đồng dạng, do đó:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = AM + MB = AM + NB \\ b = AC = AP + PC = AM + NC \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+c=2AM+BC=2AM+6$$

$$\Leftrightarrow AM=AP=\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a. \qquad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AE + EM = AE + EQ \\ AM = AP = AF + FP = AF + FQ \end{cases} \Rightarrow 2AM = AE + AF + EF$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = p_{\Delta AEF}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{2}{6} = \frac{p-6}{p} \Leftrightarrow p = 9.$$

Vậy chu vi của ΔABC bằng 18.

Chú ý: Kết quả của bài toán trên trong trường hợp tổng quát được ứng dụng khá nhiều, do đó các em học sinh cần thực hiện tường minh bài tập 1. Để thấy ứng dụng của nó chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Trong ΔABC kẻ ba đường thẳng song song với các cạnh và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác và tạo ra ba tam giác trong ΔABC. Ba tam giác đó lần lượt có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R_1, R_2, R_3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải

Ta có chu vi của ba tam giác được tạo ra theo thứ tự bằng:

$$2(p - a), 2(p - b), 2(p - c),$$

suy ra nếu gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right).R = R.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1.

a. CMR AA_1, BB_1, CC_1 là phân giác của $\Delta A_1B_1C_1$.

b. Gọi a_1, b_1, c_1 là các cạnh của $\Delta A_1B_1C_1$. Tính cosin các góc và chu vi ΔABC.

Giải

a. Chúng ta đã gặp trong bài toán về đường cao của tam giác - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

b. Xét hai trường hợp về dạng của ΔABC.

Trường hợp 1: Nếu ΔABC nhọn.

Ta có $A = 90^0 - \frac{A_1}{2}$ suy ra:

$$\cos A = \cos(90^0 - \frac{A_1}{2}) = \sin\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}{4b_1.c_1}},$$

tương tự ta có:

$$\cos B = \sqrt{\frac{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}{4a_1.c_1}} \ \& \ \cos C = \sqrt{\frac{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}{4a_1.b_1}}.$$

Nhận xét rằng hai ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng, do đó:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \cos A \Rightarrow a = BC = a_1.\sqrt{\frac{4b_1.c_1}{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}},$$

tương tự ta có:

$$b = b_1.\sqrt{\frac{4a_1.c_1}{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}},$$

$$c = c_1.\sqrt{\frac{4a_1.b_1}{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}}.$$

Từ đó suy ra chu vi P của ΔABC được cho bởi:

$$P = a_1.\sqrt{\frac{4b_1.c_1}{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}} + b_1.\sqrt{\frac{4a_1.c_1}{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}} + c_1.\sqrt{\frac{4a_1.b_1}{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}}..$$

Trường hợp 2: Nếu ΔABC tù - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 4: Cho hai ΔABC và ΔDEF cùng nội tiếp trong đường tròn (C) và có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F. \qquad (1)$$

CMR hai ΔABC và ΔDEF có cùng chu vi.

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn (C).

Trong ΔABC, ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{p_{\Delta ABC}}{R}. \qquad (2)$$

Trong ΔDEF, ta có:

$$\sin D+\sin E+\sin F=\frac{d}{2R}+\frac{e}{2R}+\frac{f}{2R}=\frac{p_{\Delta DEF}}{R}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{p_{\Delta ABC}}{R}=\frac{p_{\Delta DEF}}{R} \Leftrightarrow p_{\Delta ABC}=p_{\Delta DEF}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Trong các tam giác có chu vi không đổi hãy tìm tam giác có chu vi đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Giải

Ta có:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow (pr)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow pr^2=(p-a)(p-b)(p-c) \overset{\text{Cosi}}{\leq} \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{p}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy $r_{\text{Max}}=\frac{p}{3\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$p-a=p-b=p-c \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow$ tam giác là đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết BC = a. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính nửa chu vi p của ΔABC, biết EF = d.

☐ $p=\frac{a^2}{a-d}$. ☐ $p=\frac{a^2}{a+d}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết độ dài các cạnh là các số nguyên liên tiếp. Tính nửa chu vi p của ΔABC, biết trong ΔABC một trung tuyến vuông góc với một phân giác.

☐ $p=\frac{9}{2}$. ☐ $p=6$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Trong ΔABC kẻ ba đường thẳng song song với các cạnh và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác và tạo ra ba tam giác trong ΔABC. Ba tam giác đó lần lượt có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2, 3, 5. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R=11$. ☐ $R=10$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Đường thẳng (d) chia tam giác thành hai phần có diện tích và chu vi bằng nhau. CMR đường thẳng (d) đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $p = \dfrac{a^2}{a-d}$.

Bài tập 2: $p = \dfrac{9}{2}$.

Bài tập 3: $R = 10$.

Bài tập 5: Trên trung tuyến BB_1 lấy điểm D đối xứng với B qua B_1, suy ra $B_1D = m_b$.

Trong ΔABD, ta có:

$$BC < AB + AD \Leftrightarrow m_b < a + c \Leftrightarrow m_b < \frac{a+c}{2}, \qquad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$m_c < \frac{a+b}{2}, \qquad (2)$$

$$m_a < \frac{b+c}{2}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$m_a + m_b + m_c < 2p. \qquad (*)$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó trong ΔGAB, ta có:

$$GA + GB > AB \Leftrightarrow \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > c \Leftrightarrow m_a + m_b > \frac{3c}{2}, \qquad (4)$$

tương tự ta cũng có:

$$m_b + m_c > \frac{3a}{2}, \qquad (5)$$

$$m_c + m_a > \frac{3b}{2}, \qquad (6)$$

Cộng theo vế (4), (5), (6) ta được:

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c. \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TOÁN 9

DIỆN TÍCH TAM GIÁC - TỈ SỐ DIỆN TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Diện tích tam giác - Tỉ số diện tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C, bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính đường tròn nội tiếp r, ta có:

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$.

  với p là nửa chu vi tam giác, r bán kính đường tròn nội tiếp)
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong mục này chúng ta đi giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới diện tích.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có AB = 3, AC = 4 và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính BC.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}.3.4.\sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 60^0 \\ A = 120^0 \end{array}\right.$$

- Với $A = 60^0$, ta được:

  $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 13 \Leftrightarrow BC = \sqrt{13}.$$
- Với $A = 120^0$, ta được:

  $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 37 \Leftrightarrow BC = \sqrt{37}.$$

Ví dụ 2: Qua một điểm O trong tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thường 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là 4, 9, 16. Tính diện tích của tam giác ABC.

Giải

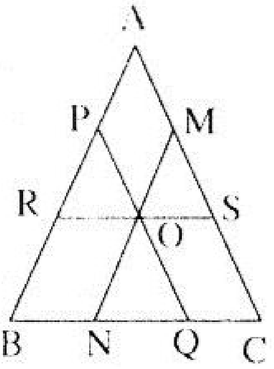
Giả sử qua O kẻ các đường thẳng RS//BC, MN//AB, PQ//AC.

Dễ dàng thấy rằng các tam giác ABC, OMS, OPR, OMQ đồng dạng với nhau, do đó nếu gọi S, S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích của các tam giác. Ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{PR}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{PR}{AB}. \qquad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{OM}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{S}} = \frac{OM}{AB} = \frac{AP}{AB}. \qquad (2)$$

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{ON}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{S}} = \frac{ON}{AB} = \frac{RB}{AB}. \qquad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{2+3+4}{\sqrt{S}} = \frac{AP+PR+RB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S} = 9 \Leftrightarrow S = 81.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC có diện tích 12. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2},\ \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}.$$

và BN cắt CM tại D.

a. Tính diện tích tam giác BMC, ABN và AMN theo S_0.

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ACD và BCD; ABD và BCD

c. Suy ra diện tích của tam giác BCD theo S_0

Giải

a. Ta có:

$$\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BM.BC.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin B} = \frac{BM}{BA} = \frac{BA-AM}{BA} = 1 - \frac{AM}{BA} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow S_{BMC} = 6.$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABN} = 4.$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AM.AN.\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A} = \frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = 2$$

b. Vẽ hai đường cao AK và BL của hai tam giác ACD và BCD thì AK//BL

Suy ra:

$$\frac{AK}{BL} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{AB - AM} = 1$$

Do đó:

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\frac{1}{2}DC.AK}{\frac{1}{2}DC.BL}=\frac{AK}{BL}=1$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}=\frac{1}{2}.$$

c. Ta có:

$$S_{BCD}+S_{ABD}+S_{ACD}=12 \Leftrightarrow S_{BCD}+\frac{1}{2}.S_{BCD}+S_{BCD}=12 \Leftrightarrow S_{BCD}=\frac{24}{5}.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $S=p^2.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}$.

b. $r=p.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}$.

Giải

a. Ta có:

$$S=p(p-a)tg\frac{A}{2}=p(p-b)tg\frac{B}{2}=p(p-c)tg\frac{C}{2},$$

suy ra:

$$S^3=p(p-a)tg\frac{A}{2}.p(p-b)tg\frac{B}{2}.p(p-c)tg\frac{C}{2}$$

$$=p^2.p(p-a)(p-b)(p-c).tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}=p^2.S^2.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow S=p^2.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có $S = pr$, do đó áp dụng kết quả trong a), ta được:

$$pr=p^2.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r=p.tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Từ điểm M tuỳ ý trong ΔABC, các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. CMR:

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1$$

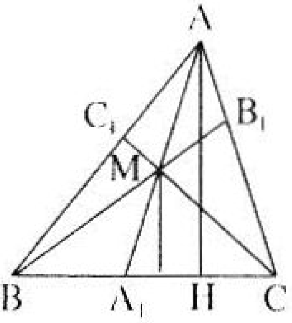
Giải

Kẻ AH, MK vuông góc với BC.

Ta có:

$$\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{MK}{AH}=\frac{\frac{1}{2}MK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}, \qquad (1)$$

tương tự ta cũng có:



$$\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}, \qquad (2)$$

$$\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 6: Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k\text{, với } k>0\text{, k cho trước.}$$

a. Biết $S_{\Delta ABC}=S_0$. Tính $S_{\Delta MNP}$ theo S_0 và k.

b. ΔABC cố định. Hãy chọn số k sao cho ΔMNP có diện tích nhỏ nhất

Giải

a. Ta có:

$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BA.BN.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin B}=\frac{BN}{BC}=\frac{BN}{BN+NC}=\frac{\frac{BN}{NC}}{\frac{BN}{NC}+1}=\frac{k}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{ABN}=\frac{k}{k+1}.S_0$$

Ta có:

$$\frac{S_{\Delta BNM}}{S_{\Delta ABN}}=\frac{\frac{1}{2}BM.BN.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BN.\sin B}=\frac{BM}{BA}=\frac{BM}{BM+MA}=\frac{\frac{BM}{MA}}{\frac{BM}{MA}+1}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1}=\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BNM}=\frac{1}{k+1}.S_0$$

tương tự, ta cũng có:

$$S_{\Delta CNP}=S_{\Delta AMP}=\frac{k}{(k+1)^2}.S_0$$

do đó:

$$S_{\Delta MNP}=S_0-\frac{3k}{(k+1)^2}S_0=S_0[1-\frac{3k}{(k+1)^2}]$$

b. $S_{\Delta MNP}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$(1-\frac{3k}{(k+1)^2})\text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3k}{(k+1)^2}\text{ lớn nhất.}$$

Ta có:

$$(k+1)^2\geq 4k \Rightarrow \frac{k}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{4}\Rightarrow 1-\frac{3k}{(k+1)^2}\geq\frac{1}{4}$$

Vậy $S_{\Delta MNP}$ min = $\frac{1}{4}S_0$ khi

$(k + 1)^2 = 4k \Leftrightarrow k = 1.$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Qua một điểm O trong tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thường 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là S_1, S_2, S_3. Tính diện tích của tam giác ABC theo S_1, S_2, S_3.

☐ $S = 4(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. ☐ $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC có diện tích S_0, trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:

$$\frac{AM}{AB} = m,\ \frac{AN}{AC} = n,\ \text{với } 0 < m, n < 1.$$

và BN cắt CM tại D.

a. Tính diện tích ABMC.

☐ $S_{ABMC} = (1 - m)S_0$. ☐ $S_{ABMC} = (1 + m)S_0$. ☐ Khác.

b. Tính diện tích ΔABN.

☐ $S_{\Delta ABN} = nS_0$. ☐ $S_{\Delta ABN} = (1 - n)S_0$. ☐ Khác.

c. Tính diện tích ΔAMN.

☐ $S_{\Delta AMN} = (1-m).(1-n)S_0$. ☐ $S_{\Delta AMN} = m.nS_0$. ☐ Khác.

d. Tính tỉ số diện tích của hai ΔACD và ΔBCD.

☐ $\frac{m}{1-m}$. ☐ $\frac{m}{1+m}$. ☐ Khác.

e. Tính tỉ số diện tích của hai ΔABD và ΔBCD.

☐ $\frac{n}{1+n}$. ☐ $\frac{n}{1-n}$. ☐ Khác.

f. Tính diện tích của ABCD.

☐ $S_{ABCD} = \frac{(1-m)(1+n)S_0}{1+mn}$. ☐ $S_{ABCD} = \frac{(1-m)(1-n)S_0}{1-mn}$.

Bài tập 3: Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lần lượt lấy các điểm E, F và D sao cho

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CD}{DA} = \frac{1}{3}.$$

Gọi S_0, S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, DEF và tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AF, BD, CE.

a. Tính $\frac{S_2}{S_0}$.

☐ $\frac{S_2}{S_0} = \frac{4}{13}$. ☐ $\frac{S_2}{S_0} = \frac{5}{13}$. ☐ Khác.

b. Tính $\frac{S_2}{S_1}$.

☐ $\frac{S_2}{S_1}=\frac{65}{91}$. ☐ $\frac{S_2}{S_1}=\frac{64}{91}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân tại A, có $A=120^0$, độ dài trung tuyến kẻ từ B bằng $\sqrt{7}$. Đường tròn tâm A bán kính bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cắt BC tại M, N và cắt AB, AC theo thứ tự tại P, Q. Xác định tỷ số diện tích phần chung của tam giác và đường tròn với diện tích tam giác.

☐ $k=\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$. ☐ $k=\frac{4\pi+9}{27}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC. Trên hai cạnh AB và AC, lấy hai điểm B_1 và C_1 sao cho :

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{3} \text{ và } \frac{AC_1}{AC}=\frac{1}{2}.$$

Vẽ đường tròn qua ba điểm A, B_1 và C_1. Đường thẳng qua B_1 cắt AC_1 ở D và cắt đường tròn ở E, biết rằng $AC_1=4$, $AD=1$, $DE=2$ và $S_{\Delta ABC}=12$. Tính diện tích AB_1C_1E.

☐ S = 3,5. ☐ S = 4,5. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC biết độ dài các cạnh a, b, c. Các đường phân giác trong của ΔABC cắt các cạnh đối diện tại các điểm A_1, B_1, C_1. Tính diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ theo a, b, c và diện tích S của ΔABC.

☐ $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. ☐ $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC có $B<90^0$, đường cao AP và CQ và $\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}=\frac{1}{9}$

a. Tính cosB.

☐ $\cos B=\frac{2}{3}$. ☐ $\cos B=\frac{1}{3}$. ☐ Khác.

b. Biết $PQ=2\sqrt{2}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R=\frac{7}{2}$. ☐ $R=\frac{9}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho ΔABC nhọn và các đường cao AH, BK, CL. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{HKL}}{S_{ABC}}=2\cos A\cos B\cos C$$

Bài tập 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$l_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Bài tập 10: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, AC và AB lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, sao cho:

$$\frac{BA_1}{BC}=\frac{1}{6}, \frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{3}, \frac{CA_1}{AB}=\frac{1}{2}.$$

AA_1 và CC_1 cắt nhau tại P, đồng thời hai đường thẳng đó cắt BB_1 tại M, N. Chứng minh rằng:

$$S_{MNP} = S_{A_1MB} + S_{B_1NC} + S_{C_1AP}$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Bài tập 2:

a. $S_{ABMC} = (1 - m)S_0$.

b. $S_{\Delta ABN} = nS_0$.

c. $S_{\Delta AMN} = m.nS_0$.

d. $\dfrac{m}{1 - m}$.

e. $\dfrac{n}{1 - n}$.

f. $S_{MBCD} = \dfrac{(1 - m)(1 - n)}{1 - mn}$.

Bài tập 3: $\dfrac{S_2}{S_0} = \dfrac{4}{13}$, $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{64}{91}$.

Bài tập 4: $k = \dfrac{2\pi\sqrt{3} + 9}{27}$.

Bài tập 5: $S = \dfrac{7}{2}$.

Bài tập 6: $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{2abcS}{(a + b)(b + c)(c + a)}$.

Bài tập 7: $\cos B = \dfrac{1}{3}$ và $R = \dfrac{9}{2}$.

BÀI TOÁN 10

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác thường

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC ta cần nhớ lại các hệ thức:

1. *Định lý hàm số cosin*
2. *Định lý hàm số sin*
3. *Định lý trung tuyến*
4. *Công thức về diện tích*
5. *Công thức bán kính đường tròn nội tiếp*

và chúng ta đã từng khai thác chi tiết các hệ thức đó để giải một vài dạng toán. Bài toán được trình bày trong mục này chỉ mang tính tổng hợp hơn, tức là chúng ta đi vận dụng linh hoạt các hệ thức cũng như các định lý đã biết trong tam giác thường. Vẫn với các dạng toán thường gặp, nhưng sẽ tổng quát hơn:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có a = 7, b = 8, c = 6.

a. Tính đường cao h_a.

b. Tính trung tuyến m_a.

Giải

a. Ta tính h_a bằng hai cách:

Cách1: Ta có:

$$16S^2=(8+7+6)(8+7-6)(7+6-8)(6+8-7)=21.9.5.7=9.49.15 \Leftrightarrow S=\frac{21\sqrt{15}}{4}.$$

Suy ra:

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{21\sqrt{15}}{2.7}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$$

Cách 2: Ta có:

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49+36-64}{1.7.6}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4},$$

$$\sin^2 B=1-\cos^2 B=\frac{15}{16}\Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$h_a=c.\sin B=6.\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

b. Áp dụng định lý về trung tuyến, ta được:

$$m_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{a^2}{2})=\frac{1}{2}(36+64-\frac{49}{2})=\frac{151}{4}\Leftrightarrow m_a=\frac{\sqrt{151}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ba số a, b, c thoả mãn:

$$a=x^2+x+1,\ b=2x+1,\ c=x^2-1.$$

a. Xác định x để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC.

b. Với điều kiện của a), hãy xác định số đo của góc A.

Giải

a. Để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC, ta cần có:

$$0<a+b-c=x^2+x+1+(2x+1)-(x^2-1)=3x+1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}. \quad (1)$$

$$0<a+c-b=x^2+x+1+(x^2-1)-(2x+1)=2x^2-x-1 <> \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad (2)$$

$$0<b+c-a=(2x+1)+(x^2-1)-(x^2+x+1)=x-1 <> x>1. \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3), ta được điều kiện là x > 1.

b. Ta có:

$$\cos A==\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow A=120^0.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}.$$

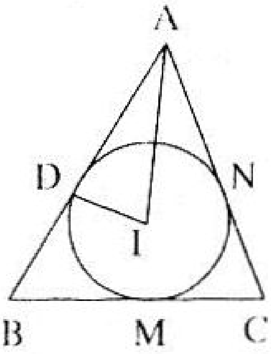
Giải

Áp dụng định lý hàm số cosin và hàm số sin, ta có:

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}=\frac{\sin A.\cos B}{\cos A.\sin B}=\frac{\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$



Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, (I) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại M, N, D.

Áp dụng định lý hàm số sin đối với ΔBIC:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{BC}{\sin BIC} \Rightarrow \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{BC}{\sin(\pi-\frac{B+C}{2})}=\frac{BC}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{BC}{\cos\frac{A}{2}}. \quad (1$$

Mặt khác, trong ΔIMB ta có:

$$IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \quad (2$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$\frac{r}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{a}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có $\hat{A}=60^0$, $h_c=\sqrt{3}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 5. Tính các cạnh của tam giác.

Bài tập 2: Cho ba số a, b, c thoả mãn:

$$a = x^2 + 2,\ b = x^2 - 2x + 2,\ c = x^2 + 2x + 2.$$

a. Xác định x để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC.

b. Với điều kiện của a), hãy chứng minh rằng:

- $r = \dfrac{\sqrt{3(x^4 - 12x^2 + 4)}}{6}$.
- $r = 3h_a$.
- $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $A\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$.

b. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2C = 2bc\sin(B + C)$

Bài tập 4: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)R}{abc}$

b. $(a-b)\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2} + (b-c)\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} + (a-c)\operatorname{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$

Bài tập 5: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

b. $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

c. $\dfrac{r}{p} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $1+\dfrac{r}{R}=\cos A + \cos B + \cos C$

b. $c^2 = (a-b)^2 + 4S.\dfrac{1-\cos C}{\sin C}$

Bài tập 7: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

b. $S = Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

Bài tập 8: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = p(p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

b. $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

Bài tập 9: Cho ΔABC có trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

c. $a^2 - c^2 = 2b^2$

d. $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

Bài tập 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. Nếu $a + c = 2b$ thì $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

b. Nếu $a + c = 2b$ thì $2(c - a) = 3r(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2})$

c. Nếu $a^2 + c^2 = 2b^2$ thì $2\operatorname{cotg}B = \operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}A$

Bài tập 11: Cho ΔABC, có các cạnh thoả mãn $a^3 = b^3 + c^3$. CMR ΔABC nhọn và các góc thoả mãn:

$$2\sin^2 A = \operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C.$$

Bài tập 12: Cho ΔABC, AD là phân giác trong của góc A; D_1 là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB. Chứng minh rằng:

$$AD_1 = \frac{2p(p-a)}{b+c}$$

Bài tập 13: Đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{pr^2}{2R}.$$

Bài tập 14: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và 3 cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a. Chứng minh rằng chu vi $\Delta A'B'C'$ bằng $a\cos A + b\cos B + c\cos C$

b. Chứng minh rằng $R_{A'B'C'} = \frac{1}{2} R_{ABC}$

Bài tập 15: Cho ΔABC nhọn. AA_1 là đường cao xuất phát từ A, H là trực tâm và G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

a. $\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C = \frac{AA_1}{HA_1}$.

b. $HG // BC \Leftrightarrow \operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C = 3$

Bài tập 16: Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp có tâm I, bán kính r. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, IBC, ICA, IBA có bán kính lần lượt là R, R_1, R_2, R_3. Chứng minh rằng:

$$R_1R_2R_3 = 2R^2.r.$$

BÀI TOÁN 11

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác vuông

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, ta có các hệ thức sau:

1. (*Định lý Pitago*): $BC^2 = AB^2+AC^2$.
2. (*Định lý hình chiếu*): $AB^2 = BH.BC$.
   $$AC^2 = CH.BC.$$
3. Công thức đường cao: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$,
4. Công thức diện tích: $S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC$.
5. Các tỉ số lượng giác:
   $$\text{Sin}B = \cos C = \frac{AC}{BC},\ \sin C = \cos B = \frac{AB}{BC},$$
   $$\text{tg}B = \text{cotg}C = \frac{AC}{AB},\ \text{cotg}B = \text{tg}C = \frac{AB}{AC},$$

dựa vào các hệ thức trên để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác vuông là:

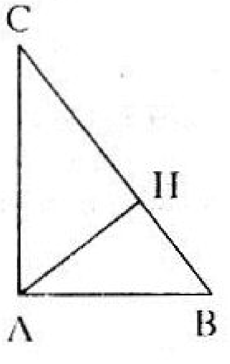
Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác vuông.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác vuông.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, $\text{tg}C = \frac{2}{3}$ và đường cao AH = 6. Tính độ dài các đoạn HB, HC, AB, AC.

Giải



Hai ΔAHB và ΔCHA đồng dạng, do đó:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC} = \text{tg}C = \frac{2}{3} \Rightarrow HC = \frac{3}{2}AH = 9.$$

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} = \text{tg}C = \frac{2}{3} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}AH = 4.$$

Trong ΔABC, ta có:

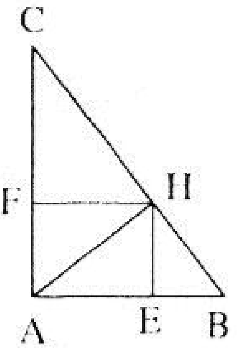
$$AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{4(4+9)} = 2\sqrt{13}.$$

$$AC^2 = CH.BC \Leftrightarrow AC = \sqrt{CH.BC} = \sqrt{9(4+9)} = 3\sqrt{13}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A; AH là đường cao. HE, HF lần lượt là các đường cao của ΔAHB, ΔAHC. Chứng minh rằng:

a. $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

b. $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.



Giải

a. Ta có:

$$3AH^2+BE^2+CF^2=3AH^2+BH^2-HE^2+CH^2-HF^2.$$
$$=3AH^2-EF^2++(BH+HC)^2-2HB.HC.$$
$$=2AH^2+BC^2-2AH^2= BC^2.$$

b. Trong ΔAHB:

$$BE=\frac{BH^2}{BA} \Rightarrow BE^2=\frac{BH^4}{BA^2}=\frac{BH^4}{BH.BC}=\frac{BH^3}{BC} \quad (1)$$

Trong ΔAHC:

$$CF=\frac{CH^2}{CA} \Rightarrow CF^2=\frac{CH^4}{CA^2}=\frac{CH^4}{CH.BC}=\frac{CH^3}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\frac{BH}{\sqrt[3]{BC}}+\frac{CH}{\sqrt[3]{BC}}=\frac{BC}{\sqrt[3]{BC}}=\sqrt[3]{BC}.$$

Ví dụ 3: Cho hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A và A_1 và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng:

a. $aa_1=bb_1+cc_1$.

b. $\frac{1}{hh_1}=\frac{1}{bb_1}+\frac{1}{cc_1}$.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có:

$b = a\cos\alpha$, $c = a\sin\alpha$,

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$b_1 = a_1.\cos\alpha$, $c_1 = a_1.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$bb_1 + cc_1 = aa_1.\cos^2\alpha + aa_1.\sin^2\alpha = aa_1.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = aa_1$, đpcm.

b. Trong ΔABC, ta có:

$$b=\frac{h}{\sin\alpha},\ c=\frac{h}{\cos\alpha}.$$

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$b_1=\frac{h_1}{\sin\alpha},\ c_1=\frac{h_1}{\cos\alpha}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{bb_1}+\frac{1}{cc_1}=\frac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}}+\frac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{hh_1}=\frac{1}{hh_1}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c). \qquad (1)$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông.

Giải

Sử dụng công thức Hêrong, ta biến đổi (1) về dạng:

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-c)(p-b)$

$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2 \Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a+c-b) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là vuông tại C.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB=15, AC=20, AH là đường cao.

a. Tính độ dài BC.

☐ BC=25. ☐ BC=15. ☐ Khác.

b. Tính độ dài BH.

☐ BH=9. ☐ BH=12. ☐ Khác.

c. Tính độ dài CH.

☐ CH=12. ☐ CH=16. ☐ Khác.

d. Tính độ dài AH.

☐ AH=12. ☐ AH=14. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, $tgC = \frac{3}{4}$ và đường coa AH=12.

a. Tính độ dài đoạn HB.

☐ HB=9. ☐ HB=8. ☐ Khác.

b. Tính độ dài đoạn CH.

☐ CH=26. ☐ CH=16. ☐ Khác.

c. Tính độ dài đoạn AB.

☐ AB=14. ☐ AB=15. ☐ Khác.

d. Tính độ dài đoạn AC.

☐ AC=20. ☐ AC=22. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng BH=1, $AC = 2a\sqrt{5}$.

a. Tính độ dài cạnh BC.

☐ BC=6. ☐ BC=5. ☐ Khác.

b. Tính độ dài cạnh AB.

☐ AB=2. ☐ $AB=\sqrt{5}$. ☐ Khác.

c. Tính độ dài đường cao AH.

☐ AH=2 ☐ AH=3. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại A, AB=3, AC=4, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho IA=2IB. CI cắt AH tại E. Tính độ dài CE.

☐ CE=$\frac{16\sqrt{5}}{11}$. ☐ CE=$\frac{16\sqrt{5}}{7}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh:

a. $\cos(B-C)=\frac{2bc}{a^2}$. b. $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{b}{a+c}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC vuông tại góc A, cạnh góc vuông là b, c. M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM}=\alpha$. Chứng minh rằng:

$$AM=\frac{bc}{b\cos\alpha+c\sin\alpha}.$$

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A; AD là phân giác trong của $\hat{A}$. Chứng minh rằng:

$$AD=\frac{\sqrt{2}}{b+c}bc.$$

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH; r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng:

$$r_1=r\frac{c}{a} \text{ và } r_2=r\frac{b}{a}$$

từ đó suy ra:

$$r_1^2+r_1^2=r^2$$

Bài tập 9: Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các ΔABC, ΔHAB, HAC thoả mãn:

$$p^2=p_1^2+p_2^2.$$

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Bài tập 10: Cho ΔABC vuông tại A; D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Chứng minh rằng:

a. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{DB}{DC}$; $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3=\frac{BE}{CF}$.

b. $AD^3=BC.EB.CF$.

Bài tập 11: Cho ΔABC, biết 3sinA+4cosA=3. Chứng minh rằng ΔABC là vuông

Bài tập 12: Cho ΔABC, biết

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: BC=25, BH=9, CH=16, AH=12.

Bài tập 2: Ta có hai đáp số:

AB=.2, AC=3, HB= $\frac{4}{13}$, HC= $\frac{9}{13}$

hoặc AB=.3, AC=2, HB= $\frac{9}{13}$, HC= $\frac{4}{13}$.

Bài tập 3: HB=9, CH=16, AB=15, AC=20.

Bài tập 4: BC=5, AB= $\sqrt{5}$, AH=2.

Bài tập 5: CE= $\frac{16\sqrt{5}}{11}$.

Bài tập 6: *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Trong ΔAMB ta có:

$$AM = AB.\cos BAM = 2R.\cos\alpha.$$

Trong ΔAMB ta có:

$$MN = OM.\mathrm{tg}MON = T.\mathrm{tg}2\alpha.$$

$$ON = \frac{OM}{\cos MON} = \frac{R}{\cos 2\alpha}.$$

Do đó:

$$AN = AO + ON = R + \frac{R}{\cos 2\alpha} = \frac{R(1+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}.$$

BÀI TOÁN 12

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC CÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác cân

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC cân tại A, ta có:

- $AB=AC$,
- $ABC = ACB$,
- Với K là trung điểm BC thì AK vừa là trung tuyến, đường cao, trung trực, phân giác.

cùng với việc vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác thường và đặc biệt là tam giác vuông để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác cân là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác cân.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác cân.

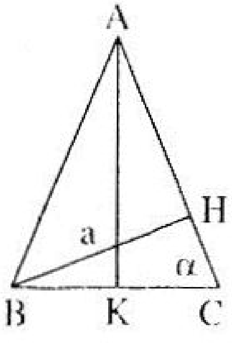
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao $BH=a$, $\widehat{ABC}=\alpha$.

a. Tính các cạnh và đường cao còn lại.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải



a. Trong ΔHBC, ta được:

$$\sin\alpha=\frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BC=\frac{BH}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Trong ΔKAB, ta được:

$$\cos\alpha=\frac{BK}{AB} \Leftrightarrow AB=\frac{BK}{\cos\alpha}=\frac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha}=\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha=\frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK=AB.\sin\alpha=\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}.\sin\alpha=\frac{a}{2\cos\alpha}.$$

b. Ta có:

$$AC=2R.\sin B \Leftrightarrow R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{a}{4\sin^2\alpha.\cos\alpha}.$$

$$S_{\Delta ABC}=pr \Leftrightarrow r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}BH.AC}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{a}{2(1+\cos\alpha)}.$$

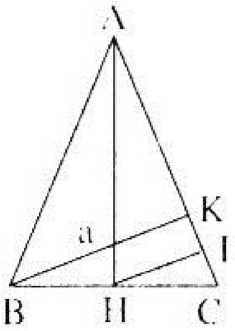
Ví dụ 2: Cho ΔABC cân đỉnh A, đường cao AH, BK. CMR:

$$\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AH^2}$$

Giải

Dựng HI ⊥ AC, suy ra HI là đường trung bình của ΔKBC, do đó:

$HI=\frac{1}{2}BK.$



Trong ΔHAC, ta có:

$$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HC^2}+\frac{1}{HA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\frac{1}{2}BK)^2}=\frac{1}{(\frac{BC}{2})^2}+\frac{1}{HA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AH^2}$$, đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết

$$2\sin^4A+2\sin^4B+\sin^4C=2(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2C,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông cân.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔABC, ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$2.\left(\frac{a}{2R}\right)^4+2.\left(\frac{b}{2R}\right)^4+\left(\frac{c}{2R}\right)^4=2.\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2\right].\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$\Leftrightarrow c^4+2(a^4+b^4)-2(a^2+b^2)c^2=0$

$\Leftrightarrow c^4-2(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)^2+2(a^4+b^4)=0$

$\Leftrightarrow [c^2-(a^2+b^2)]+(a^2-b^2)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2-(a^2+b^2)=0 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2=a^2+b^2 \\ a=b \end{cases}$$

⇔ ΔABC là vuông cân tại C.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có AB=AC=a, $\widehat{BAC}=\alpha$

a. Tính BC.

☐ $BC=2a.\sin\frac{\alpha}{2}$. ☐ $BC=2a.\cos\frac{\alpha}{2}$. ☐ Khác.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

☐ $r=\frac{a\sin\alpha}{2(1-\sin\frac{\alpha}{2})}$. ☐ $r=\frac{a\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao BH=4, $\widehat{ABC}=30^0$.

a. Tính các cạnh ΔABC.

☐ BC=8, AB=AC=$\frac{6}{\sqrt{3}}$. ☐ BC=8, AB=AC=$\frac{8}{\sqrt{3}}$.

b. Đường cao AK.

☐ AK=$\frac{4}{\sqrt{3}}$. ☐ AK=$\frac{5}{\sqrt{3}}$. ☐ Khác.

c. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

☐ r=$\frac{4}{2-\sqrt{3}}$, R=$\frac{6}{\sqrt{3}}$. ☐ r=$\frac{4}{2+\sqrt{3}}$, R=$\frac{8}{\sqrt{3}}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân tại A, có AB=AC=2, $\widehat{ABC}=30^0$. Gọi H là trực tâm ΔABC, BK là đường cao.

a. Tính AH.

☐ AH=2. ☐ AH=3. ☐ Khác.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

☐ r=$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. ☐ r=$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân tại A, CD là đường cao vẽ từ C. CMR:

$$AB^2+BC^2+CA^2=BD^2+2AD^2+3CD^2.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC cân đỉnh A, có BC=a và đường cao AH=h. Gọi K là hình chiếu của B lên cạnh AC.

a. Tìm điều kiện giữa a và h để điểm K thuộc cạnh AC.

b. Giả sử điều kiện này được thoả mãn, tính AK.

c. BK cắt AH tại điểm O. Tính AO.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $BC=2a.\sin\frac{\alpha}{2}$, $r=\dfrac{a\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$.

Bài tập 2: BC=8, AB=AC=$\frac{8}{\sqrt{3}}$, AK=$\frac{4}{\sqrt{3}}$, r=$\frac{4}{2+\sqrt{3}}$, R=$\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 3: AH=2, r=$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TOÁN 13
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác đều

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC đều cạnh bằng a, ta luôn có:

a. $A=B=C=60^0$.

b. Với E là trung điểm BC thì AE vừa là trung tuyến, đường cao, phân giác và trung trực và $AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c. Trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn ngoại tiếp O trùng nhau.

d. $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

dựa vào các kết quả trên để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác đều là:

- Tính toán các yếu tố trong tam giác đều.
- Chứng minh tam giác là đều.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Vì việc tính toán các yếu tố của tam giác đều thông thường chỉ thuần tuý bằng việc sử dụng công thức, do đó trong mục này chúng ta sẽ quan tâm nhiều tới bài toán nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu ΔABC các các cạnh thoả mãn:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=8abc,$$

thì ΔABC đều.

Giải

Ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=abc. \qquad (1)$$

Ta có nhận xét:

$$0<a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\le a^2. \qquad (2)$$

$$0<b^2-(a-c)^2=(b-a+c)(b+a-c)\le b^2. \qquad (3)$$

$$0<c^2-(a-b)^2=(c-a+b)(c+a-b)\le c^2. \qquad (4)$$

Nhân theo vế của (2), (3), (4), ta được:

$$(b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2\le a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\le abc. \qquad (5)$$

Vậy để có (1) thì dấu "=" phải xảy ra tại (5)

$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$S=\frac{2R^2}{3}(\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C).$$

Giải

Áp dụng đinhl ý hàm số sin và $S=\frac{abc}{4R}$, ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$\frac{abc}{4R}=\frac{2R^2}{3}\left(\frac{a^3}{8R^3}+\frac{b^3}{8R^3}+\frac{c^3}{8R^3}\right) <=> 3abc=a^3+b^3+c^3 <=> a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$<=> (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 <=> a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$<=> (a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2=0 <=> a=b=c <=> \Delta ABC \text{ đều}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} & (1) \\ a=2b\cos C & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$(1) <=> b^3+c^3-a^3=a^2b+a^2c-a^3 <=> (b+c)(b^2-bc+c^2)=(b+c)a^2$$

$$<=> b^2-bc+c^2=a^2 <=> b^2-bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$<=>\cos A=\frac{1}{2} => A=60^0\ (0^0<A<180^0) \qquad (3)$$

$$(2) => \cos C=\frac{a}{2b}$$

Suy ra:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\frac{a}{2b}=b^2 => b=c \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra tam giác ABC đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $ab+bc+ca=9R^2$. b. $ab+bc+ca=36r^2$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $a^2+b^2+c^2=4S\sqrt{3}$ b. $a^4+b^4+c^4=16S^2$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$(b^2+c^2-a^2)a+(c^2+a^2-b^2)b+(a^2+b^2-c^2)c=3abc.$

Bài tập 4: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$h_a+h_b+h_c=9r.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$m_a+m_b+m_c=\frac{9R}{2}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{l_a+l_b}{c}+\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}=3\sqrt{3}.$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C}{a.\sin B+b.\sin C+c.\sin A}=\frac{2p}{9R}.$$

CHỦ ĐỀ 2

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN.

1.1. Định nghĩa

Cho đường tròn (O), bán kính R và một điểm M.

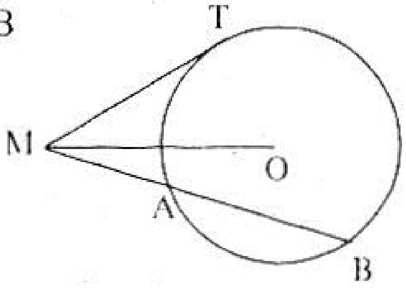
Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) là số thực OM^2-R^2, kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$. Vậy:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2.$$

1.2. Định lý

a. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M. Vẽ cát tuyến MAB tuỳ ý với đường tròn (A, B nằm trên đường tròn), ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{AM}\,.\,\overline{BM}$$



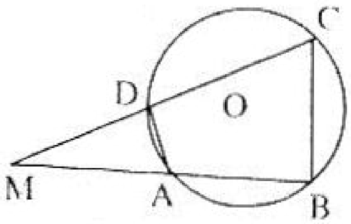
b. Nếu điểm M ở ngoài đường tròn (O, R), vẽ tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) thì:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2.$$

2. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

Định lý: Cho tứ giác ABCD, AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để ABCD nội tiếp đường tròn là:

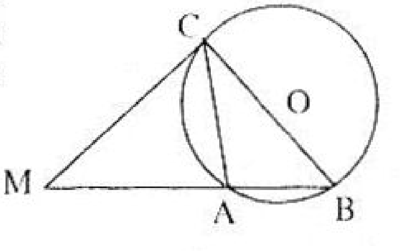
$$\overline{AM}\,.\,\overline{BM} = \overline{CM}\,.\,\overline{DM}$$



3. ĐIỀU KIỆN ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC ĐƯỜNG TRÒN.

Định lý: Cho tam giác ABC, M là một điểm thuộc đường thẳng AB (M ngoài đoạn AB). Điều kiện cần và đủ để MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là:

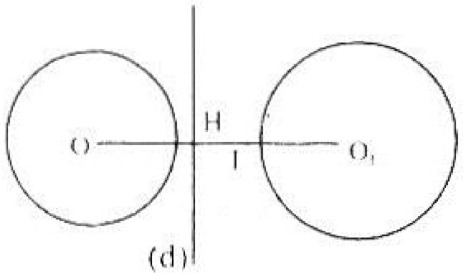
$$\overline{AM}\,.\,\overline{BM} = MC^2$$

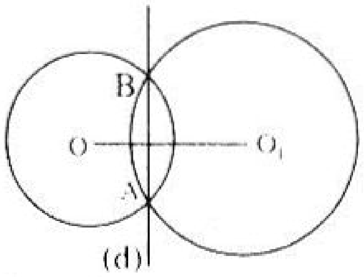


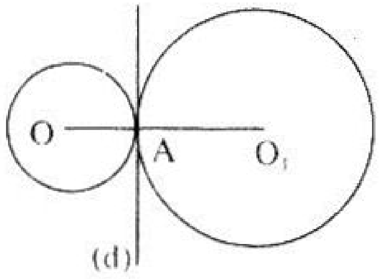
4. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

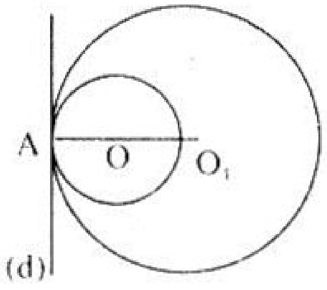
Định lý: Cho hai đường tròn không đồng tâm (O, R) và (O_1, R_1). Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho là một đường thẳng (Δ) vuông góc với đường nối tâm OO_1 tại điểm H với

$$\overline{HI} = \frac{R^2 - R_1^2}{2OO_1}, \text{ I là trung điểm đoạn } OO_1.$$









5. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1: Tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn.
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức phương tích.
Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn.
Dạng 4: Chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.
Dạng 5: Chứng minh tính chất hình học.
Dạng 6: Trục đẳng phương của hai đường tròn và các bài toán liên quan.
Dạng 7: Tập hợp điểm điểm.

BÀI TOÁN 1

TÍNH PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả sau:

$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$, với O là tâm đường tròn và R là bán kính

$= \overline{AM}\,.\,\overline{BM}$, với A, B∈(O) và A, B, M thẳng hàng.

$= MT^2$, với T∈(O) và MT tiếp xúc với (O) (hoặc $MT \perp OT$)

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn tâm O bán kính 7 và điểm M mà OM = 11.

a. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn (O).

b. Qua M, kẻ tiếp tuyến MT đến (O), T là tiếp điểm. Tính MT.

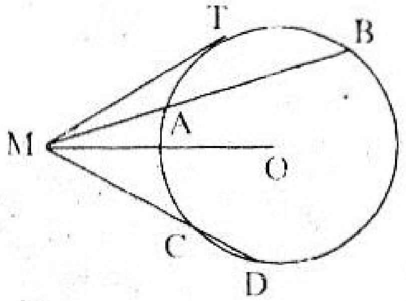
c. Qua M, kẻ hai cát tuyến MAB và MCD.

- Biết MA = 6, hãy tính MB.
- Biết CD = 1, hãy tính MC và MD.

Giải

a. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2 = 11^2 - 7^2 = 72.$$



b. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2 = 72 \Leftrightarrow MT = 6\sqrt{2}\,.$$

c. Ta lần lượt tính

- Tính MB; ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}\,.\,\overline{MB} = MA.MB = 72$$

$$\Leftrightarrow MB = \frac{72}{MA} = 12.$$

- Tính MC, MD, ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD} = MC.MD = 72$$

$$\Leftrightarrow MC(MC + CD) = 72$$

$$\Leftrightarrow MC^2 + MC - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} MC = 8 \\ MC = -9 \text{ loại} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} MC = 8 \\ MD = 9 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Hai dây AB và CD trong đường tròn tâm O cắt nhau tại điểm M (M nằm trong đường tròn). Tính MC và MD biết:

a. $MA = 12$, $MB = 16$, $CD=2MB$ và $MC < MD$.

b. $MA = 12$, $2MB = 3MA$, $8MC = 3MD$.

Giải

Ta có:

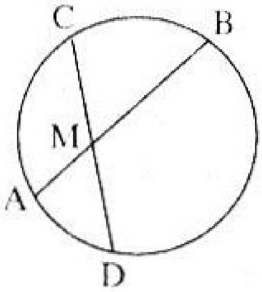
$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD} \Leftrightarrow MC.MD=MA.MB.$$

a. Theo giả thiết ta có:

$$MC.MD = 12.16 = 192. \qquad (1)$$

Ta có:

$$CD = 2MB \Leftrightarrow MC + MD = 32. \qquad (2)$$



Xét hệ phương trình tạo bởi (1), (2):

$$\begin{cases} MC + MD = 32 \\ MC.MD = 192 \end{cases}$$

suy ra MC, MD là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 32t + 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 24 \\ t = 8 \end{array}\right. \overset{MC<MD}{\Rightarrow} \begin{cases} MC = 8 \\ MD = 24 \end{cases}.$$

b. Theo giả thiết ta có:

$$MB = 18 \text{ và } MC.MD = 12.18 = 216. \qquad (3)$$

Cũng lại từ giả thiết $8MC=3MD \Leftrightarrow MC=\frac{3}{8}MD$. (4)

Thay (4) vào (3), ta được:

$$\frac{3}{8}MD.MD = 216 \Leftrightarrow MD^2 = 576 \Leftrightarrow MD=24 \Rightarrow MC=9.$$

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (O, R) và (I, R_1) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A và dây AB của (O) có độ dài bằng R

a. Tính $\mathscr{P}_{B/(I)}$, từ đó suy ra độ dài đoạn thẳng BT tiếp xúc với (O') tại T.

b. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Tính $\mathscr{P}_{D/(I)}$.

Giải

a. Vì ΔOAB đều nên

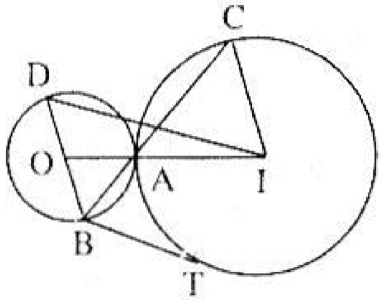
$$O\hat{A}B = 60^0 \Rightarrow O'\hat{A}C = 60^0 \Rightarrow \Delta IAC \text{ đều} \Rightarrow AC=R_1 \Rightarrow BC=R+R_1.$$

Suy ra:

$$\mathscr{P}_{B/(I)} = \overline{BA}\,.\,\overline{BC} = BA.BC=R(R+R_1).$$

Mặt khác ta có:

$$BT^2 = \mathscr{P}_{B/(I)} = R(R+R_1) \Rightarrow BT=\sqrt{R(R+R_1)}.$$



b. Xét ΔOID, ta có:

$$ID^2 = OD^2+OI^2-2OD.OI.\cos 120^0$$
$$=R^2+(R+R_1)^2-2R.(R+R_1).(-\frac{1}{2}) = R^2+(R+R_1)^2+R.(R+R_1).$$

Khi đó:

$$\mathscr{P}_{D/(I)} = ID^2 - R_1^2 = R^2+(R+R_1)^2+R.(R+R_1) - R_1^2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn tâm O bán kính 5 và điểm M mà OM=7.

a. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn (O).

☐ $\mathscr{P}_{M/(O)}=28$. ☐ $\mathscr{P}_{M/(O)}=24$. ☐ Khác.

b. Qua M, kẻ tiếp tuyến MT đến (O), T là tiếp điểm. Tính MT.

☐ MT=$2\sqrt{7}$. ☐ MT=$2\sqrt{6}$. ☐ Khác.

c. Qua M, kẻ hai cát tuyến MAB và MCD.

- Biết MA=4, hãy tính MB.

☐ MB=7. ☐ MB=6. ☐ Khác.

- Biết CD=5, hãy tính MC và MD.

☐ MC=2, MD=7. ☐ MC=3, MD=8. ☐ Khác.

Bài tập 2: Hai dây AB và CD trong đường tròn tâm O cắt nhau tại điểm M (M nằm trong đường tròn). Tính MC và MD biết:

a. MA=4, MB=8, CD=18 và MC<MD.

☐ MC=2, MD=16. ☐ MC=1, MD=32. ☐ Khác.

b. MA=3, MB=15, $\frac{MC}{MD}=\frac{5}{9}$.

☐ MC=5, MD=9. ☐ MC=10, MD=18. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho hai đường tròn (O, 1) và (I, 2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A và dây AB của (O) có độ dài bằng 1.

a. Tính $\mathscr{P}_{B/(I)}$, từ đó suy ra độ dài đoạn thẳng BT tiếp xúc với (O') tại T.

☐ $\mathscr{P}_{B/(I)}=3$, BT=$\sqrt{3}$. ☐ $\mathscr{P}_{B/(I)}=4$, BT=2. ☐ Khác.

b. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Tính $\mathscr{P}_{D/(I)}$.

☐ $\mathscr{P}_{D/(I)}=6$. ☐ $\mathscr{P}_{D/(I)}=9$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có BC=2, CA=4, AB=5, trọng tâm G. Tính $\mathscr{P}_{A/(GBC)}$.

☐ $\mathscr{P}_{A/(GBC)}=15$. ☐ $\mathscr{P}_{D/(I)}=11$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O,R) và(O', R$\sqrt{3}$) cắt nhau tại A và B; BM và BN lần lượt là hai đường kính của (O) và (O').

a. Chứng minh rằng: $\mathscr{P}_{M/(O')}+\mathscr{P}_{N/(O)}=4OO'^2$.

b. Cho biết OO'=2R

- Gọi G là trọng tâm của tam giác MAB. Tính $\mathscr{P}_{G/(O')}$.

☐ $\mathscr{P}_{G/(O')}=\frac{4R^2}{9}$. ☐ $\mathscr{P}_{G/(O')}=\frac{2R^2}{5}$. ☐ Khác.

- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác NAB. Tính $\mathscr{P}_{I/(O)}$.

☐ $\mathscr{P}_{I/(O)}=(9+5\sqrt{3})R^2$. ☐ $\mathscr{P}_{I/(O)}=(9-5\sqrt{3})R^2$. ☐ Khac.

Bài tập 6: Cho ΔABC nội tiếp tròn đường tròn (O) có đường cao AE=3 (E thuộc đoạn BC); EB=1, EC=3.

a. Tính $\mathscr{P}_{H/(O)}$, với H là trực tâm của ΔABC.

☐ $\mathscr{P}_{H/(O)}=-3$. ☐ $\mathscr{P}_{H/(O)}=3$. ☐ Khác.

b. Tính $\mathscr{P}_{G/(O)}$, với G là trọng tâm của ΔABC.

☐ $\mathscr{P}_{G/(O)}=-\frac{44}{9}$. ☐ $\mathscr{P}_{G/(O)}=\frac{44}{9}$. ☐ Khác.

c. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC ở K. Tính $\mathscr{P}_{K/(O)}$.

☐ $\mathscr{P}_{K/(O)}=-45$. ☐ $\mathscr{P}_{K/(O)}=45$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\mathscr{P}_{M/(O)}=24$, MT=$2\sqrt{6}$, MB=6, MC=3, MD=8.

Bài tập 2:

a. MC=2, MD=16.

b. MC=5, MD=9.

Bài tập 3: $\mathscr{P}_{B/(I)}=3$, BT=$\sqrt{3}$, $\mathscr{P}_{D/(I)}=9$.

Bài tập 4: $\mathscr{P}_{A/(GBC)}=15$.

Bài tập 5:

a. Ta có ngay:

$$\mathscr{P}_{M/(O')}+\mathscr{P}_{N/(O)}=MB^2+NB^2=4OB^2+4O'B^2=4OO'^2.$$

b. $\mathscr{P}_{G/(O')}=\frac{4R^2}{9}$, $\mathscr{P}_{I/(O)}=(9+5\sqrt{3})R^2$.

Bài tập 6: $\mathscr{P}_{H/(O)}=-3$, $\mathscr{P}_{G/(O)}=-\frac{44}{9}$, $\mathscr{P}_{K/(O)}=45$.

BÀI TOÁN 2

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC PHƯƠNG TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh đẳng thức phương tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả sau:

$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$, với O là tâm đường tròn và R là bán kính

$= \overline{AM}.\overline{BM}$, với A, B∈(O) và A, B, M thẳng hàng.

$=MT^2$, với T∈(O) và MT tiếp xúc với (O) (hoặc MT⊥OT)

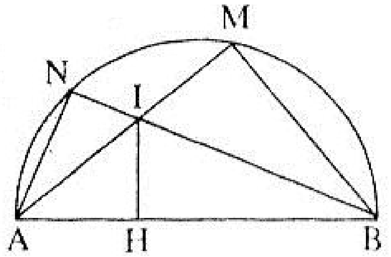
từ đó chuyển đẳng thức phương tích về đẳng thức độ dài đại số hoặc tích vô hướng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho nửa đường tròn đường kính AB với hai dây AM, BN cắt nhau tại I. Chứng minh rằng

$$\mathscr{P}_{A/(IBM)} + \mathscr{P}_{B/(IAN)} = AB^2.$$

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB.

Tứ giác MBHI nội tiếp, bởi $\widehat{BMI} = \widehat{BHI} = 90^0$, do đó:

$$\mathscr{P}_{A/(IBM)} = \overline{AH}.\overline{AB} = AH.AB. \qquad (1)$$

Tứ giác NAHI nội tiếp, bởi $\widehat{ANI} = \widehat{AHI} = 90^0$, do đó:

$$\mathscr{P}_{B/(IAN)} = \overline{BH}.\overline{BA} = BH.BA. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\mathscr{P}_{A/(IBM)} + \mathscr{P}_{B/(IAN)} = AH.AB + BH.BA = (AH + BH).BA = AB^2, \text{ đpcm.}$$

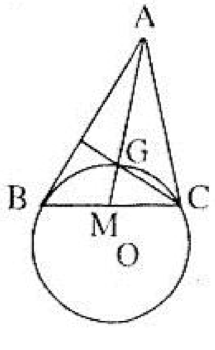
Ví dụ 2: Cho ΔABC có BC = a, CA = b, AB = c, trọng tâm G.

a. Tính $\mathscr{P}_{A/(GBC)}$ theo a, b, c.

b. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} + \mathscr{P}_{B/(GAC)} + \mathscr{P}_{C/(GAB)} = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Giải



a. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (GBC), ta có ngay:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} = OA^2 - R^2. \qquad (1)$$

Trong ΔABC, ta có:

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow 9OG^2 = OA^2+OB^2+OC^2+2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow 7R^2 = OA^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}). \qquad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$a^2=BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2=2R^2-2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}. \qquad (3)$$

$$b^2=AC^2=\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2=R^2+OA^2-2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}. \qquad (4)$$

$$c^2=AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2= R^2+OA^2-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \qquad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được:

$$a^2+b^2+c^2=4R^2+2OA^2-2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})=4R^2+2OA^2-(a^2+b^2+c^2) \qquad (6)$$

Thay (6) và (2), ta được:

$$7R^2 = 3OA^2 + 4R^2 - (a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow OA^2 - R^2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}. \qquad (7)$$

Thay (7) và (1), ta được:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

b. Tương tự cách thực hiện trong a), ta được:

$$\mathscr{P}_{B/(GAC)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$\mathscr{P}_{C/(GAB)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

suy ra:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)}+\mathscr{P}_{B/(GAC)}+\mathscr{P}_{C/(GAB)}= a^2+b^2+c^2. \qquad (8)$$

Trong ΔABC, ta có:

$$GA^2=\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2), \qquad (9)$$

tương tự ta cũng có:

$$GB^2=\frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2), \qquad (10)$$

$$GC^2=\frac{1}{9}(2a^2+2b^2-c^2). \qquad (11)$$

Cộng theo vế (9), (10), (11), ta được:

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2-c^2). \qquad (12)$$

Thay (12) vào (8), ta được:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)}+\mathscr{P}_{B/(GAC)}+\mathscr{P}_{C/(GAB)}=3(GA^2+GB^2+GC^2),\text{ đpcm.}$$

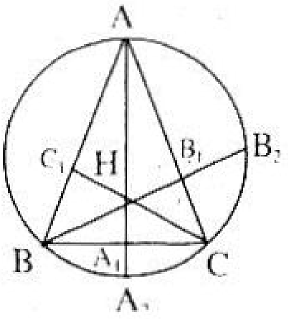
Ví dụ 3: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a. $\overline{HA}.\overline{HA_1}=\overline{HB}.\overline{HB_1}=\overline{HC}.\overline{HC_1}$.

b. $\overline{A_1H}.\overline{A_1A}=-\overline{A_1B}.\overline{A_1C}$.

c. $\overline{AH}.\overline{AA_1}+\overline{BH}.\overline{BB_1}+\overline{CH}.\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Giải



a. Tứ giác ABA_1B_1 nội tiếp, do đó:

$$\overline{HA}.\overline{HA_1}=\overline{HB}.\overline{HB_1}. \quad (1)$$

Tứ giác ACA_1C_1 nội tiếp, do đó:

$$\overline{HA}.\overline{HA_1}=\overline{HC}.\overline{HC_1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b. Gọi A_2 là điểm đối xứng với H qua BC, suy ra $A_2\in(ABC)$, ta được:

$$\overline{A_1B}.\overline{A_1C}=\overline{A_1A_2}.\overline{A_1A}=\overline{A_1H}.\overline{A_1A},\text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$\overline{AH}.\overline{AA_1}=\overline{AB}.\overline{AC_1}=\overline{AC}.\overline{AB_1}$$

$$\Rightarrow \overline{AH}.\overline{AA_1}=\frac{1}{2}(\overline{AB}.\overline{AC_1}+\overline{AC}.\overline{AB_1}). \quad (3)$$

tương tự ta cũng có:

$$\overline{BH}.\overline{BB_1}=\frac{1}{2}(\overline{BC}.\overline{BA_1}+\overline{BA}.\overline{BC_1}). \quad (4)$$

$$\overline{CH}.\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(\overline{CA}.\overline{CB_1}+\overline{CB}.\overline{CA_1}). \quad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được:

$$\overline{AH}.\overline{AA_1}+\overline{BH}.\overline{BB_1}+\overline{CH}.\overline{CC_1}=\frac{1}{2}[(\overline{AB}.\overline{AC_1}+\overline{AC}.\overline{AB_1})+$$

$$+(\overline{BC}.\overline{BA_1}+\overline{BA}.\overline{BC_1})+(\overline{CA}.\overline{CB_1}+\overline{CB}.\overline{CA_1})]$$

$$=\frac{1}{2}[\overline{AB}(\overline{AC_1}-\overline{BC_1})+\overline{BC}(\overline{BA_1}-\overline{CA_1})+\overline{CA}(\overline{CB_1}-\overline{AB_1})]$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),\text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đoạn thẳng AB, biết phương tích của A, B và trung điểm I của AB đối với một đường tròn (O) lần lượt là $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$. CMR:

$$\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3 = \frac{AB^2}{2}.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Gọi G là trọng tâm của tam giác.

a. Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{G/(ABC)} = -\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

b. GA, GB, GC gặp lại đường tròn (ABC) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{GA_1^2} + \frac{1}{GB_1^2} + \frac{1}{GC_1^2} = \frac{27}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài tập 3: Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Một điểm M bất kỳ có hình chiếu vuông góc trên AB, CD, AD, BC lần lượt là: H, H', K, K'. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MH}\,.\,\overline{MH'} + \overline{MK}\,.\,\overline{MK'}.$$

Bài tập 4: Cho đường tròn (O, R), CD là một đường kính của đường tròn. Trên đường thẳng CD lấy hai điểm A, B sao cho $\overline{OA}\,.\,\overline{OB} = R^2$. Chứng minh rằng:

a. $\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)} = AB^2$.

b. $R^2.(\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)}) + \mathscr{P}_{A/(O)}.\mathscr{P}_{B/(O)} = 0$.

Bài tập 5: Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{D/(ABC)} = -\frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta lần lượt có:

$$\mathscr{P}_1 = OA^2 - R^2, \qquad (1)$$

$$\mathscr{P}_2 = OB^2 - R^2, \qquad (2)$$

$$\mathscr{P}_3 = OI^2 - R^2 = [\frac{1}{2}(OA^2 + OB^2) - \frac{AB^2}{4}] - R^2. \qquad (3)$$

Thay OA^2 từ (1) và OB^2 từ (2) vào (3), ta được:

$$AB^2 = 2(\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3) \Leftrightarrow \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3 = \frac{AB^2}{2}, \text{ đpcm.}$$

BÀI TOÁN 3

TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tứ giác nội tiếp đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng mệnh đề:

- Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB}=\overline{MC}\,.\,\overline{MD}$$

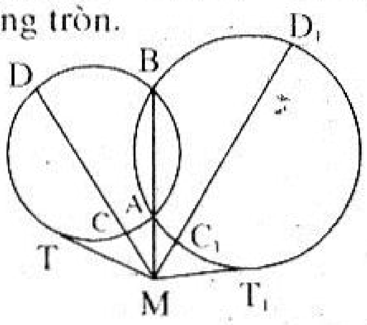
thì 4 điểm A, B, C, D cùng ở trên một đường tròn.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại hai điểm A và B. Gọi M là một điểm tuỳ ý trên đường thẳng AB (ngoài đoạn AB).

a. Qua M lần lượt dựng các tiếp tuyến MT và MT_1 với (O) và (O_1). Chứng minh rằng $MT=MT_1$.

b. Qua M, dựng hai cát tuyến tuỳ ý MCD và MC_1D_1 với (O) và (O_1). Chứng minh rằng tứ giác CDC_1D_1 nội tiếp đường tròn.



Giải

a. Ta có:

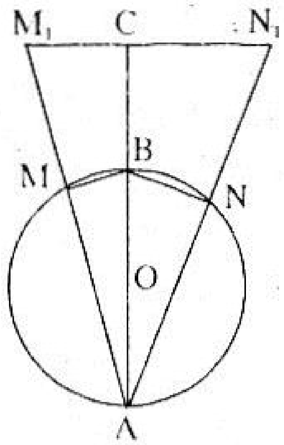
$$MT^2=MA.MB=MT_1^2 \Leftrightarrow MT=MT_1.$$

b. Ta có:

$$MC.MD=MA.MB=MC_1.MD_1$$

Vậy CDC_1D_1 nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 2: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Gọi (O) là đường tròn đường kính AB, d là đường thẳng qua C và vuông góc với BC. M, N là hai điểm tuỳ ý trên (O), AM và AN lần lượt cắt d tại M_1, N_1. Chứng minh rằng tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.



Giải

Tứ giác BMM_1C nội tiếp được bởi

$$BMM_1 = BCM_1 = 90^0 \Rightarrow \overline{AM}\,.\,\overline{AM_1}=\overline{AB}\,.\,\overline{AC}\,. \quad (1)$$

Tứ giác BNN_1C nội tiếp được bởi

$$BNN_1 = BCN_1 = 90^0 \Rightarrow \overline{AN}\,.\,\overline{AN_1}=\overline{AB}\,.\,\overline{AC}\,. \quad (2)$$

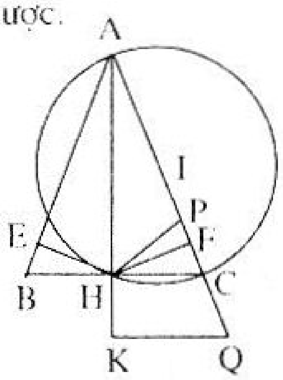
Từ (1) và (2) suy ra $\overline{AM}\,.\,\overline{AM_1}=\overline{AN}\,.\,\overline{AN_1}$.

Vậy tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.

Ví dụ 3: Cho ΔABC có đường cao AH (H ở trong đoạn BC). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC

a. Chứng minh tứ giác BEFC nội itếp được.

b. Gọi I là trung điểm AC, P là trung điểm IC, Q là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{AQ}=4\overrightarrow{AC}$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn đường kính AC cắt AH kéo dài tại K. Chứng minh tứ giác PQKH nội tiếp được.



Giải

a. Từ ΔHAB vuông, ta có $AH^2=AE.AB$. (1)

Từ ΔAHC vuông, ta có $AH^2=AF.AC$ (2)

Từ (1, (2)), suy ra:

$AE.AB=AF.AC \Leftrightarrow \overline{AE}.\overline{AB}=\overline{AF}.\overline{AC}$.

$\Leftrightarrow$ tứ giác BEFC nội tiếp.

b. Ta có:

$$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=AC^2. \quad (3)$$

Từ ΔAKC vuông, ta có:

$$AC^2=AH.AK=\overline{AH}.\overline{AK} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$\overline{AH}.\overline{AK}=\overline{AP}.\overline{AQ} \Leftrightarrow$ tứ giác PQKH nội tiếp.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, M, N là hai điểm bất kì trên tiếp tuyến tại B của đường tròn. Giả sử AM, AN cắt đường tròn tại M_1, N_1. Chứng minh tứ giác MM_1N_1N nội tiếp.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O, R) với đường kinhd AB cố định và một đường kính CD di động. Gọi (d) là tiếp tuyến tại B của (O); AC và AD lần lượt cắt (d) tại M và N.

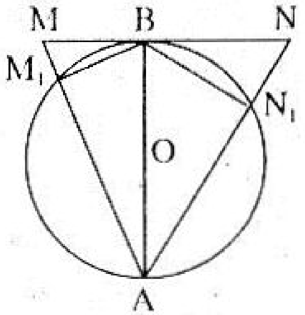
a. Chứng minh rằng tứ giác MNDC nội tiếp được trong một đường tròn (O').

b. Đặt $\widehat{CAB}=\alpha$ $(0<\alpha<90^0)$. Tính bán kính R' của (O') theo R và α. Xác định α để R' nhỏ nhất.

☐ $\alpha=45^0$. ☐ $\alpha=65^0$. ☐ Khác:

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:



- Trong ΔABM, ta có $\overline{AM}.\overline{AM_1}=AB^2$. (1)
- Trong ΔABM, ta có $\overline{AN}.\overline{AN_1}=AB^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{AM}.\overline{AM_1}=\overline{AN}.\overline{AN_1}$.

Vậy tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.

Bài tập 2: $\alpha=45^0$.

BÀI TOÁN 4
CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tính tích vô hướng của hai vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta dùng tính chất sau:

Gọi I là điểm thuộc đường thẳng BC. Điều kiện cần và đủ để IA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A là:

$$IA^2 = \overline{IB}\,.\,\overline{IC}\,.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 2 đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại A và B. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường thẳng AB (ngoài đoạn AB). Kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn (O). Chứng minh rằng MT tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔTCD tại T.

Giải

MT tiếp xúc với đường tròn (O) nên ta có:

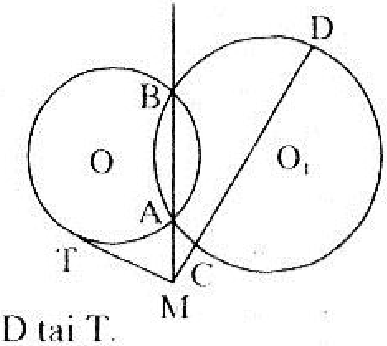
$$MT^2 = \overline{MA}\,.\,MB \qquad (1)$$

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O_1) nên:

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$MT^2 = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}\,.$$



Vậy MT tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔTCD tại T.

Ví dụ 2: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B, gọi I là trung điểm của một cung AB hai dây IC, ID của (O) cắt AB lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a. IA tiếp xúc với đường tròn (AMC), IB tiếp xúc với đường tròn (BND)

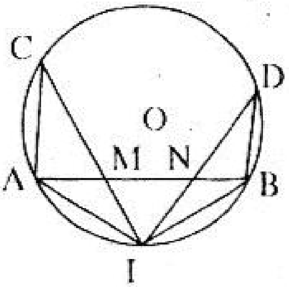
b. Tứ giác CMND nội tiếp đường tròn.

c. Hai đường tròn (AMC) và (BND) tiếp xúc với nhau tại A.

Giải

a. Nhận xét rằng ΔAMI và ΔCAI đồng dạng bởi:

$$\begin{cases} \hat{I}\text{chung} \\ \widehat{MAI} = \widehat{ACI} \end{cases}$$



suy ra:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow IA^2 = IM.IC = \overline{IM}\,.\,\overline{IC}\,. \qquad (1)$$

Vậy IA tiếp xúc với đường tròn (AMC)

Chứng minh tương tự ta cũng có

$IB^2 = \overline{IN} . \overline{ID}$. (2)

Vậy IB tiếp xúc với đường tròn (ANC).

b. Vì I là trung điểm của cung AB nên:

$IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$\overline{IM} . \overline{IC} = \overline{IN} . \overline{ID}$.

Do đó tứ giác AMND nội tiếp.

c. Ttheo kết quả trên:

$IA^2 = \overline{IM} . \overline{IC} = \overline{IN} . \overline{ID}$

Suy ra IA tiếp xúc với hai đường tròn (AMC) và (AND) có tiếp tuyến chung tại A nên chúng tiếp xúc với nhau tại A.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao. Trên đường tròn tâm C bán kính CA, lấy điểm M không ở trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường thẳng CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM.

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔAOM cắt đường thẳng BC tại một điểm thứ hai là E và cắt (O) tại D. AD cắt BC tại F. CMR:

a. $\overline{FB} . \overline{FC} = \overline{FE} . \overline{FM}$

b. $\overline{EB} . \overline{EC} = \overline{EF} . \overline{EM}$

c. EA tiếp xúc với các đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp ΔAMF.

Bài tập 3: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và đường tròn (γ) di động và tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại M và đoạn thẳng AB tại N, MA và MB lần lượt gặp (γ) tại C và D. Chứng minh rằng:

a. AB//CD và AN là phân giác của góc $\widehat{MAB}$ và MN đi qua một điểm cố định I

b. IA tiếp xúc với đường tròn (AMN) tại A.

BÀI TOÁN 5

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức tính phương tích của điểm đối với đường tròn ta thiết lập được mối quan hệ độ dài hoặc vectơ của các đối tượng trong hình, từ đó chứng minh được:

a. Mối quan hệ định tính, ví dụ như:
   - Tính song song, vuông góc.
   - Đường thẳng đi qua điểm cố định, đường tròn đi qua điểm cố định.
   - ...

b. Mối quan hệ định lượng, ví dụ như
   - Đoạn thẳng bằng nhau.
   - Tổng không đổi.
   - ...

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. các dây AC, BD của (O) cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O') tại các điểm thứ hai tương ứng E, F. Chứng minh rằng CD//EF.

Giải

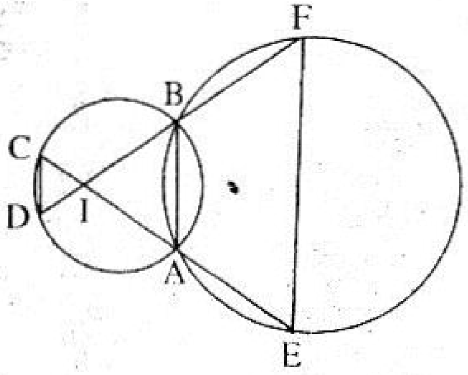
Ta có:

$\mathscr{P}_{I/(O)} = \overline{IA}\,.\,\overline{IC} = \overline{ID}\,.\,\overline{IB}$

$\Leftrightarrow$ IA.IC=ID.IB. (1)

$\mathscr{P}_{I/(O')} = \overline{IA}\,.\,\overline{IE} = \overline{IB}\,.\,\overline{IF}$

$\Leftrightarrow$ IA.IE=IF.IB. (2)



Chia theo vế (1), (2), ta được:

$$\frac{IC}{IE} = \frac{ID}{IF} \Leftrightarrow CD//EF.$$

Ví dụ 2: Gọi AB là một đường kính của đường tròn (O), M là một điểm trên (O). Đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại P, cắt (O) tại C và D, CD cắt mặt phẳng tại I. Chứng minh I là trung điểm đoạn MP.

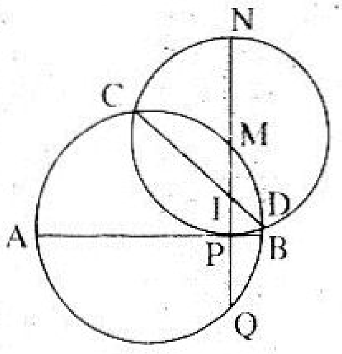
Giải

Kéo dài MP gặp lại các đường tròn (O) và (M) lần lượt tại N và Q.

Ta có:

$\mathscr{P}_{I/(O)} = \overline{IM}\,.\,\overline{IQ} = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}\,.$

$\mathscr{P}_{I/(M)} = \overline{IN}\,.\,\overline{IP} = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}\,.$



suy ra:

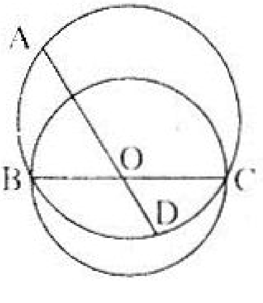
$$\overline{IM}.\overline{IQ}=\overline{IN}.\overline{IP} \Leftrightarrow \overline{IM}(\overline{IP}+\overline{PQ})=\overline{IP}(\overline{IM}+\overline{MN}) \Leftrightarrow \overline{IM}.\overline{PQ}=\overline{IP}.\overline{MN}$$

Mà PQ=PM=MN suy ra IM=IP.

Vậy I là trung điểm đoạn MP.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) và một điểm cố định A không ở trên (O), BC là một đường kính di động của (O). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua một điểm cố định khác A.

Giải



Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D.

Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(ABC)}=\overline{OA}.\overline{OD}=\overline{OB}.\overline{OC}=-R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD}=-\frac{R^2}{\overline{OA}} \Rightarrow \text{điểm D cố định.}$$

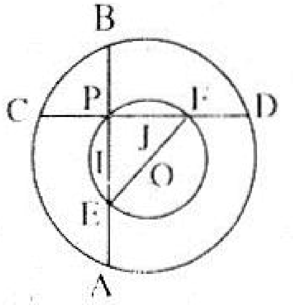
Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua một điểm D cố định khác A.

Chú ý: Kết quả trên cho phép chúng ta có thể kết luận được về quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC - Chúng ta sẽ còn gặp lại dạng toán này trong bài *toán tập hợp điểm*.

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O, r), với R>r. Một điểm P di động trên đường tròn nhỏ. Qua P kẻ hai dây cung AB và CD của đường tròn lớn và vuông góc với nhau. AB, CD theo thứ tự cắt đường tròn nhỏ tại giao điểm thứ hai là E và F. CMR:

a. AB^2+CD^2 không đổi.

b. $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ không đổi.



Giải

a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, ta có:

$$AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=OB^2+OA^2-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$$

$$=2R^2-2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})=2R^2-2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IA})$$

$$=2R^2-2OI^2+2IA^2=2R^2-2OI^2+2(OA^2-OI^2)=4R^2-4OI^2. \quad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$AB^2=4R^2-4OJ^2. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$AB^2+CD^2=8R^2-4(OI^2+OJ^2)=8R^2-4OP^2=8R^2-4r^2.$$

b. Ta có:

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PD}^2$$

$$=(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})^2+2.\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD})^2+2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$$

$$=\overrightarrow{BA}^2+2.\mathscr{P}_{P/(O)}+\overrightarrow{DC}^2+2.\mathscr{P}_{P/(O)}=AB^2+CD^2+4.\mathscr{P}_{P/(O)}$$

$$=8R^2-4r^2+4(OP^2-R^2)=4R^2, \text{ dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (O, R) và một đường thẳng Δ cố định không qua O. Gọi M là điểm di động trên Δ sao cho từ M ta vẽ được hai tiếp tuyến MP, MQ đến (O) (P, Q là hai tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn qua một điểm cố định.

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và IA cắt (O) tại K, L là điểm đối tâm của K. CMR:

a. K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIBC.

b. (***Hệ thức Euler***): IA.KC=2Rr, từ đó suy ra $OI^2=R^2-2Rr$.

Bài tập 3: Cho ΔABC nhọn có BC=a, CA=b, AB=c. Gọi (C) là đường tròn qua A tiếp xúc với các cạnh BC tại D và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh rằng $\sqrt{c.BM}+\sqrt{b.CN}=a$

b. Giả sử tứ giác BCNM nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng:

$$BM=c.\cos^2 B \quad \text{và} \quad CN=b.\cos^2 C.$$

Có nhận xét gì về điểm D khi đó.

c. Giả sử ΔABC đều có cạnh là 3a và BD=2a. Tính bán kính đường tròn (C) theo a.

☐ $R=\frac{7a\sqrt{3}}{9}$. ☐ $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có $BC=2\sqrt{3}$, CA=4, AB=2. Gọi (I) là đường tròn sao cho:

$$\mathscr{P}_{A/(I)}+12=\mathscr{P}_{B/(I)}+16=\mathscr{P}_{C/(I)}+4=0.$$

a. CMR tâm I của đường tròn (I) trùng với trực tâm của ΔABC.

b. Tính bán kính của đường tròn (I).

☐ $R_I=4$. ☐ $R_I=5$. ☐ Khác.

c. Tính $\mathscr{P}_{E/(I)}$, với E là trung điểm BC.

☐ $\mathscr{P}_{E/(I)}=-16$. ☐ $\mathscr{P}_{E/(I)}=16$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thẳng hàng. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{A/(O)}.\overline{BC}+\mathscr{P}_{B/(O)}.\overline{CA}+\mathscr{P}_{C/(O)}.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3: *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Ta có:

$$\mathscr{P}_{B/(C)}=BD^2=\overline{BM}.\overline{BA} \Leftrightarrow BD^2=c.BM \Leftrightarrow BD=\sqrt{c.BM}. \qquad (1)$$

$$\mathscr{P}_{C/(C)}=CD^2=\overline{CN}.\overline{CA} \Leftrightarrow CD^2=b.CN \Leftrightarrow CD=\sqrt{b.CN}. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$BD+CD=\sqrt{c.BM}+\sqrt{b.CN} \Leftrightarrow BC=\sqrt{c.BM}+\sqrt{b.CN}=a, \text{ đpcm}$$

b. Nhận xét rằng khi đó D là trung điểm BC.

c. $R=\frac{7a\sqrt{3}}{9}$.

Bài tập 4: $R_I=4$, $\mathscr{P}_{E/(I)}=-16$.

BÀI TOÁN 6

TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Trục đẳng phương của hai đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

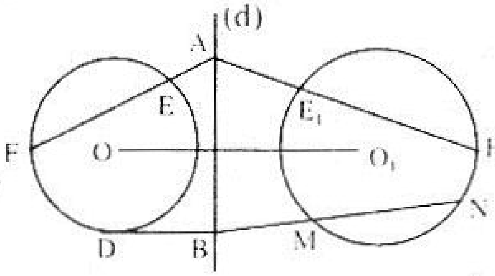
1. ***Trục đẳng phương của hai đường tròn*** được xác định bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Hai đường tròn cố định*): Sử dụng kết quả của định lý:

" Cho hai đường tròn không đồng tâm (O, R) và (O', R'). Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho là một đường thẳng (d) vuông góc với đường nối tâm OO' tại điểm H với

$$\overline{HI} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}\text{, I là trung điểm đoạn OO'."}$$

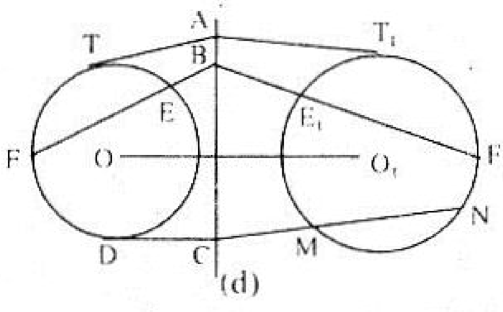
Cách 2: (*Một trong hai đường tròn thay đổi*): Ta đi xác định hai điểm phân biệt A, B thuộc (d), từ đó kết luận (AB) chính là trục đẳng phương cần tìm.



Lưu ý: Như vậy bằng việc xác định được trục đẳng phương của hai đường tròn ta có thể đi chứng minh được đặc tính của trục đẳng phương đó.

2. Sử dụng ***trục đẳng phương của hai đường tròn*** để giải một trong các dạng toán:

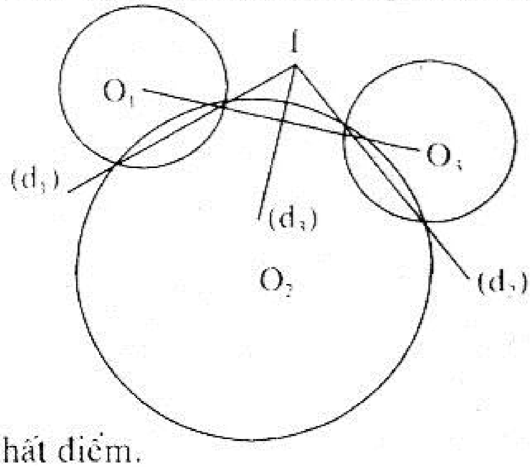
Dạng 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng: ta đi chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc trục đẳng phương (d) của hai đường tròn.



Dạng 2: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ta có hai cách trình bày:

Cách 1: Chứng minh (d_1), (d_2), (d_3) theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1).

Cách 2: Giả sử $(d_1)\cap(d_2)=\{I\}$, ta đi chứng minh $I\in(d_3)$.



Dạng 3: Chứng minh tính chất điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

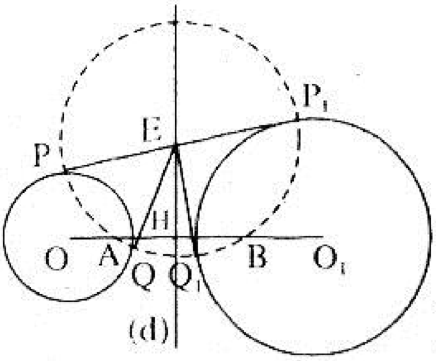
Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O, R) và (O_1, R_1) không có điểm chung, gọi (d) là trục đẳng phương của chúng. Từ điểm E trên (d) kẻ các tiếp tuyến EP, EQ, EP_1, EQ_1 tới hai đường tròn.

a. Chứng minh rằng tứ giác PQP_1Q_1 nội tiếp trong đường tròn tâm E, ký hiệu là (E).

b. Chứng minh rằng khi E thay đổi đường tròn (E) luôn đi qua hai điểm cố định.

c. Điểm F trên (d) thực hiện như trên ta có được đường tròn (F). Chứng minh rằng OO_1 là trục đẳng phương của hai đường tròn (E), (F).

Giải



a. Từ tính chất của trục đẳng phương ta được:

$$EP^2=EQ^2=EP_1^2=EQ_1^2$$

⟺ PQP_1Q_1 nội tiếp trong đường tròn tâm E.

b. Gọi A, B là giao điểm của (E) với OO_1, ta sẽ đi chứng minh A, B là hai điểm cố định mà (E) luôn đi qua.

Gọi H là giao điểm của (d) với OO_1, ta có:

$$EA^2=EP^2=OE^2-R^2$$

$$\Leftrightarrow R^2=\overrightarrow{OE}^2-\overrightarrow{EA}^2=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HE})^2-(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA})^2$$

$$=OH^2-HA^2+2\overrightarrow{HE}(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})=OH^2-HA^2+2\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{OA}=OH^2-HA^2$$

⟺ $HA^2=OH^2-R^2$ không đổi ⟹ A cố định.

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng B cố định.

Vậy A, B là hai điểm cố định mà (E) luôn đi qua.

c. Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(E)}=OE^2-R_E^2=OE^2-(OE^2-R^2)=R^2=OF^2-(OF^2-R^2)=OF^2-R_F^2=\mathscr{P}_{O/(F)}$$

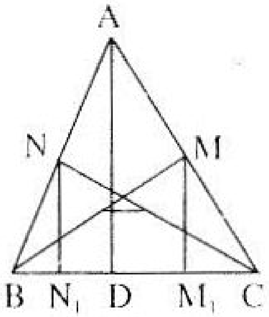
⟺ O thuộc trục đẳng phương của (E), (F).

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng O_1 thuộc trục đẳng phương của (E), (F).

Vậy OO_1 là trục đẳng phương của hai đường tròn (E), (F).

Ví dụ 2: Cho ΔABC có M, N lần lượt là trung tuyến các cạnh AC và AB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BM và CN là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Giải



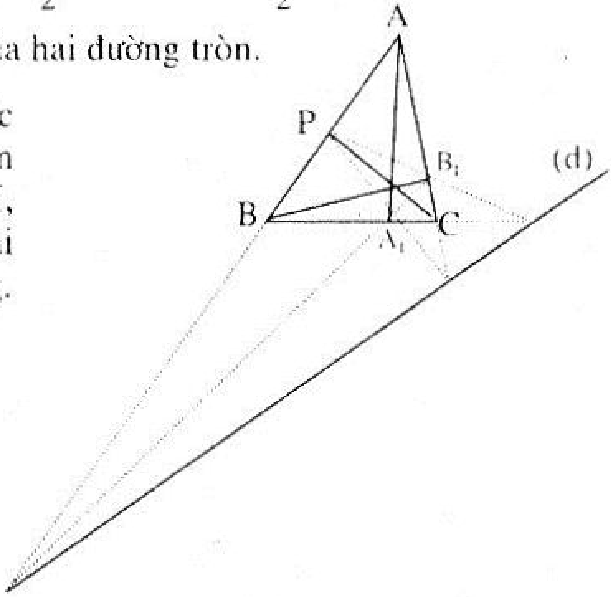
Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của BM, CN khi đó I, J theo thứ tự là tâm của hau đường tròn (BM), (CN). Kẻ AD là đường cao kẻ từ A, ta có ngay $AD \perp IJ$ (bởi IJ//CD). Do đó để thực hiện yêu cầu của bài toán ta chỉ cần đi chứng minh

$$\mathscr{P}_{D/(BM)} = \mathscr{P}_{D/(CN)}.$$

Gọi M_1, N_1 theo thứ tự lag hình chiếu vuông góc của M, N lên BC, ta có:

$$\mathscr{P}_{D/(BM)} = \overline{DB}\,.\,\overline{DM_1} = (2\,\overline{DN_1}\,).\frac{1}{2}\,.\,\overline{DC} = \overline{DN_1}\,).\frac{1}{2}\,.\,\overline{DC} = \mathscr{P}_{D/(CN)}.$$

Vậy AD là trục đẳng phương của hai đường tròn.



Ví dụ 3: Cho ΔABC, vẽ các đường cao AA', BB', CC' của tam giác. Giả sử B'C' cắt BC tại M, C'A' cắt CA tại N, A'B' cắt AB tại P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Giải

Tứ giác BCB'C' nội tiếp đường tròn nên:

$$\overline{MB}\,.\,\overline{MC} = \overline{MB'}\,.\,\overline{MC'}$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_{M/(ABC)} = \mathscr{P}_{M/(A'B'C')}$$

$\Leftrightarrow$ M ở trên trục đẳng phương (d) của (ABC) và (A'B'C').

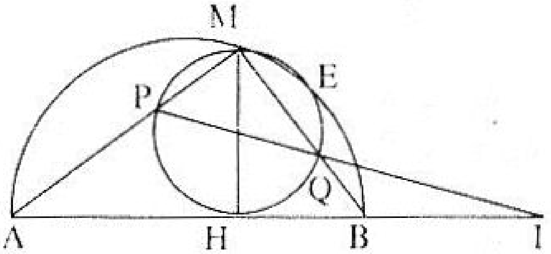
Chứng minh tương tự ta được N, P cũng ở trên (d).

Vậy M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB với điểm M ở trên nửa đường tròn đó. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Đường tròn đường kính MH cắt MA tại P, cắt MB tại Q và cắt cung AB tại điểm thứ hai E. Chứng minh các đường thẳng AB, PQ, ME đồng quy.

Giải

Ta có ME là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (MH).



Các góc $\widehat{MPH}$ và $\widehat{MQH}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{MPH} = \widehat{MQH} = 1v$

Xét các tam giác vuông ΔMAH và ΔMBH, ta có:

$$MH^2 = \overline{MP}\,.\,\overline{MA} = \overline{MQ}\,.\,\overline{MB}.$$

Suy ra tứ giác APQB nội tiếp đường tròn.

Gọi I là giao điểm của ME và PQ, ta được:

$$\overline{IA}\,.\,\overline{IB} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ} \Leftrightarrow \mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(MH)}.$$

$\Rightarrow$ I nằm trên trục đẳng phương của (O) và (MH) là ME.

Vậy AB, PQ, ME đồng quy.

Ví dụ 5: Gọi (d) là trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm tâm (O) và (O'). M là một điểm bất kỳ, kẻ MK vuông góc với (d) tại K. Trên KM và OO' định cùng chiều dương. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} - \mathscr{P}_{M/(O')} = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}\,.$$

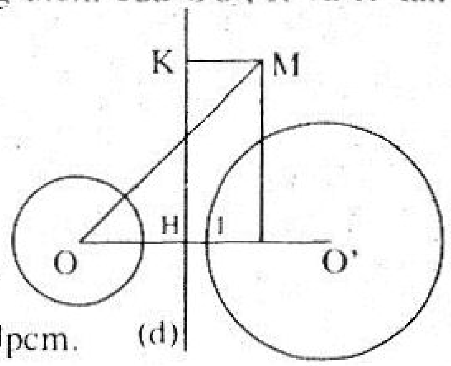
Giải

Gọi H là giao điểm của (d) và OO'; I là trung điểm của OO'; R và R' lần lượt là bán kính của (O) và (O'). Ta có:

$$R^2 - R'^2 = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{M/(O)} - \mathscr{P}_{M/(O')} &= (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2)\\ &= 2\,\overline{OO'}\,\overline{IP} - 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{IH}\\ &= 2\,\overline{OO'}\,(\overline{IP} - \overline{IH})\\ &= 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{HP} = 2\,\overline{OO'}\,.\,\overline{KM}\text{ , đpcm.}\end{aligned}$$



III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O), (O_1) cố định và điểm I trên (O), gọi It là tiếp tuyến của (O), MN là dây cung thay đổi của (O_1) và luôn song song với It, gọi A, A_1 là giao điểm cỉa IM với (O), B, B_1 là giao điểm của IN với (O), (O_1).

a. CMR đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b. Tìm quỹ tích giao điểm của MN và AB.

Bài tập 2: Cho đường tròn tâm O và điểm A ở trong đường tròn, M là một điểm di động trên đường tròn. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (AOM) với tiếp tuyến tại M của đường tròn (O).

a. Tìm quỹ tích điểm P.

b. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và đường tròn (AOM) qua một điểm cố định

Bài tập 3: Cho ΔABC và một đường thẳng (d) cắt BC, CA, AB lần lượt tại A, E, F nằm ngoài tam giác

a. Chứng minh rằng trực tâm của 4 tam giác ΔABC, ΔAEF, ΔDBF và ΔDEC nằm trên đường thẳng (Δ).

b. Chứng minh trung điểm của ba đoạn AD, EF, CF nằm trên đường thẳng (Δ') vuông góc với (Δ).

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định, M là một điểm di động trên (O). Vẽ đường tròn tâm I qua A. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và (I) tiếp xúc với một đường tròn cố định.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. A_1B_1 luôn đi qua điểm cố định E là giao điểm của It với trục đẳng phương (d) của (O) và (O_1).

b. Quỹ tích giao điểm F của MN và AB chính là trục đẳng phương (d).

Bài tập 2:

a. Quỹ tích điểm P là đường thẳng vuông góc với OA.

b. Trục đẳng phương của (O) và đường tròn (AOM) qua một điểm cố định K trên OA.

Bài tập 4: Trục đẳng phương của (O) và (I) tiếp xúc với một đường tròn cố định tâm A.

BÀI TOÁN 7

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tập hợp điểm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa trên tính chất phương tích của điểm đối với đường tròn ta xác định được tính chất của điểm đó, từ đó kết luận cho quỹ tích cần tìm.

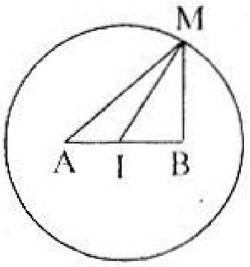
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho AB=4 và hai đường tròn (A, 2) và (B, 3). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$\mathscr{P}_{M/(A)}+\mathscr{P}_{M/(B)}=27. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:



$$\mathscr{P}_{M/(A)}=MA^2-R_A^2=MA^2-4. \qquad (2)$$

$$\mathscr{P}_{M/(B)}=MB^2-R_B^2=MB^2-9. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$MA^2+MB^2-13=27 \Leftrightarrow MA^2+MB^2=40. \qquad (4)$$

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi (4) về dạng:

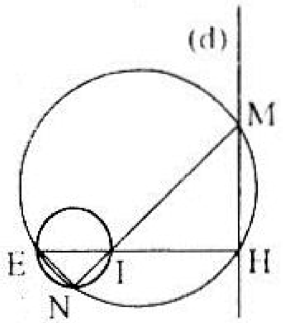
$$2MI^2+\frac{AB^2}{2}=40 \Leftrightarrow MI^2=16 \Leftrightarrow MI=4.$$

Vậy tập hợp điểm M thuộc (I, 4).

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (d) và một điểm I không thuộc (d). Gọi M là một điểm di động trên (d). Tìm quỹ tích các điểm N sao cho

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IN}=k, \text{ k là hằng số khác 0.}$$

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), khi đó lấy trên đường thẳng IH điểm E sao cho:

$$\overline{IH}\,.\,\overline{IE}=k \Rightarrow \text{E cố định.}$$

Khi đó kết hợp với điều kiện giả thiết, ta được:

$$\overline{IH}\,.\,\overline{IE}=\overline{IM}\,.\,\overline{IN}$$

$\Leftrightarrow$ tứ giác MHNE nội tiếp

Suy ra hai tam giác ΔIHM và ΔINE đồng dạng $\Rightarrow$ N nhìn EI dưới một góc vuông.

Vậy tập hợp điển N thuộc đường tròn đường kính EI.

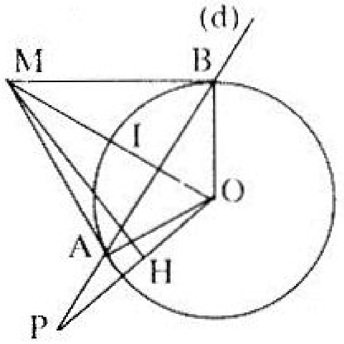
Ví dụ 3: Cho điểm P ở ngoài đường tròn (O, R), đường thẳng (d) thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M. Kẻ MH vuông góc với OP.

a. CMR O, A, B, M, H nội tiếp một đường tròn.

b. CMR H là điểm cố định khi (d) thay đổi, từ đó suy ra quỹ tích của điểm M.

Giải

a. Nhận xét rằng A, B, M cùng nhìn OM dưới một góc vuông, do đó O, A, B, M, H nội tiếp một đường tròn đường kính OM, ký hiệu là (I), với I là trung điểm OM.



b. Ta có:

$$\mathscr{P}_{P/(I)} = \overline{PH}\,.\,\overline{PO} = \overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \mathscr{P}_{P/(O)} = PO^2 - R^2$$

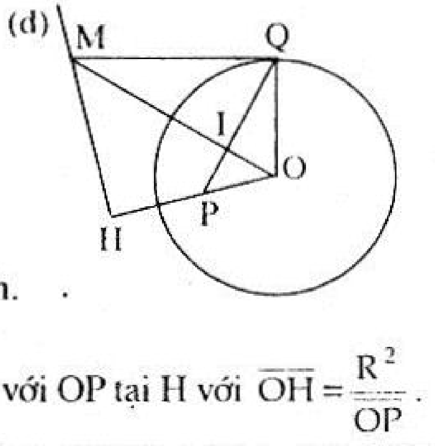
$$\Leftrightarrow \overline{PH} = \frac{PO^2 - R^2}{PO} \rightarrow \text{H cố định.}$$

Vậy suy ra M ở trên đường thẳng (d_1) vuông góc với OP tại H với $\overline{PH} = \dfrac{PO^2 - R^2}{PO}$.

Ví dụ 4: Cho điểm P ở trong một đường tròn tâm O bán kính R, Q là điểm tuỳ ý trên đường tròn (O,R). Đường thẳng qua O vuông góc với PQ cắt tiếp tuyến của (O) tại Q ở M. Tìm quỹ tích các điểm M khi Q di động trên (O).

Giải

Gọi I là giao điểm của OM và PQ, H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng OP.



Tứ giác MIPH có $\hat{I} = \hat{H} = 90^0$ nên nội tiếp đường tròn, suy ra:

$$\overline{OP}\,.\,\overline{OH} = \overline{OI}\,.\,\overline{OM} \qquad (1)$$

Trong ΔOQM, ta có:

$$R^2 = OQ^2 = \overline{OI}\,.\,\overline{OM} \qquad (2)$$

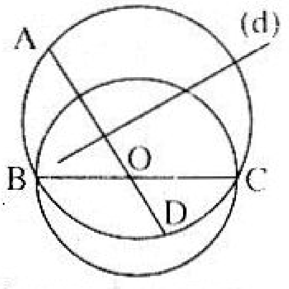
Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{OP}\,.\,\overline{OH} = R^2 \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{R^2}{\overline{OP}} \Rightarrow \text{H cố định.}$$

Vậy suy ra M ở trên đường thẳng (d) vuông góc với OP tại H với $\overline{OH} = \dfrac{R^2}{OP}$.

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O) và một điểm cố định A không ở trên (O), BC là một đường kính di động của (O). Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải



Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D.

Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(ABC)} = \overline{OA}\,.\,\overline{OD} = \overline{OB}\,.\,\overline{OC} = -R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD} = -\frac{R^2}{OA} \Rightarrow \text{điểm D cố định.}$$

Khi đó đường tròn ngoại tiếp ΔABC luôn đi qua hai điểm cố định A, P.

Vậy tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chạy trên đường trung trực của đoạn AD.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho AB=6 và hai đường tròn (A, 3) và (B, 4). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$\mathcal{P}_{M/(A)}+\mathcal{P}_{M/(B)}=10.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). một đường tròn di động qua A và trung điểm M của BC tại E và cắt (O) tại F. Gọi F' là giao điểm của AF và BC.

a. Chứng minh rằng:

$$\overline{F'M}\,.\,\overline{F'E}=\overline{F'B}\,.\,\overline{F'C},$$

$$MB^2=MC^2=\overline{ME}\,.\,\overline{MF'}.$$

b. Gọi K là giao điểm trên đường thẳng AF thoả mãn:

$$\overline{AF}\,.\,\overline{AK}=R^2.$$

Chứng minh rằng K ở trên một đường thẳng cố định

Bài tập 3: Cho đường tròn (O, R) và điểm P với OP=2R; MN là một đường kính của (O).

a. Tìm quỹ tích tâm đường tròn (PMN).

b. Dựng ΔPMN với $\widehat{MPN}=45^0$.

c. Đặt $\widehat{MPN}=\alpha$. Chứng minh rằng $\cos\alpha=\dfrac{3R^2}{PM.PN}$.

Tìn giá trị lớn nhất của cosα.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O, R) di động luôn tiếp xúc với đoạn AB=R cố định tại trung điểm I của nó. Tìm quỹ tích các điểm M thoả mãn:

$2MT^2=MA^2+MB^2$, với MT là tiếp tuyến của (O) tiếp điểm T.

Bài tập 5: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D cố định và theo thức tự đó cùng ở trên một đường thẳng Δ. Hai đường tròn di động qua A, B và C, D cắt nhau tại M, N.

a. Chứng minh đường thẳng MN qua một điểm cố định K

b. Chứng minh các tiếp các tiếp điểm của các tiếp tuyến với hai đường tròn trên vẽ từ K thuộc một đường tròn cố định.

Bài tập 6: Cho đường tròn tâm O và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại M và N, hai đường tròn đường kính AM và AN lần lượt cắt (O) tại M' và N'. Tìm quỹ tích giao điểm I của MM' và NN'.

Bài tập 7: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R'). Đặt OO'=d. Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại A và B. Gọi I là tâm đường tròn (O'AB).

a. Tính OI theo R, R', d.

b. Tìm quỹ tích điểm I khi tiếp tuyến di động.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4: M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với AB, với H được xác định bởi:

$$\overline{IH} = \frac{3R}{4}.$$

Bài tập 5: Bạn đọc tự vẽ hình.

a. Gọi K là giao điểm của MN và Δ. Ta có:

$$\mathscr{P}_{K/(O)} = \overline{KA}\,.\,\overline{KB},$$

$$\mathscr{P}_{K/(O')} = \overline{KC}\,.\,\overline{KD},$$

suy ra:

$$\overline{KA}\,.\,\overline{KB} = \overline{KC}\,.\,\overline{KD}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{KB} + \overline{BA})\overline{KB} = (\overline{KB} + \overline{BC})(\overline{KB} + \overline{BD})$$

$$\Leftrightarrow \overline{KB}(\overline{BA} - \overline{BC} - \overline{BD}) = \overline{BC}\,.\,\overline{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{KB} = \frac{\overline{BC}.\overline{BD}}{\overline{DA} - \overline{BC}} = \text{hằng số}.$$

K ở trên đường thẳng Δ cố định và $\overline{KB}$ là hằng số nên K cố định

b. Thực hiện tương tự như a) ta có:

$$\overline{KC} = \frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC} - \overline{DA}} = -\frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC}.\overline{BD}}\overline{KB}.$$

Vì $-\dfrac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC}.\overline{BD}} < 0$ nên K ở trong đoạn BC, suy ra K ở ngoài các đường tròn (O) và (O'). Do đó tồn tại các tiếp tuyến vẽ từ K đến hai đường tròn này.

Gọi các tiếp điểm là E, E', F, F'.

Ta có:

$$KE^2 = KF^2 = KE'^2 = KF'^2 = \overline{KA}\,.\,\overline{KB}$$

Từ đó suy ra E, E', F, F' thuộc đường tròn cố định tâm K bán kính $R = \sqrt{\overline{KA}.\overline{KB}}$.

Bài tập 6: Đường thẳng vuông góc với OA.

Bài tập 7: Quỹ tích điểm I thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R_1 = \dfrac{|d^2 - R^2|}{2R'}$.

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1

TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM TRÊN TRỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định toạ độ của một điểm thoả mãn các điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cần nhớ:

- $x_M = \overline{OM}$,
- $\overline{AB} = x_A - x_B$
- Hệ thức Salơ,

Kết hợp với điều kiện cho trước để tính toạ độ của điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ 1 và 2. Tìm điểm M thoả mãn hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Giải

Gọi x_M là toạ độ của điểm M.

Ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(x_A - x_M) + 3(x_B - x_M) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - x_M) + 3(2 - x_M) = 0 \Leftrightarrow -5x_M + 8 = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{8}{5}.$$

Ví dụ 2: Trên x'Ox, cho hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của AB. Tính toạ độ điểm I theo x_A, x_B.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI} = x_A + \overline{AI} \\ x_I = \overline{OI} = \overline{OB} + \overline{BI} = x_B + \overline{BI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_I = x_A + x_B + \overline{AI} + \overline{BI} = x_A + x_B \Leftrightarrow x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B, gọi I là điểm nằm giữa A và B thoả mãn hệ thức:

$$3IB = 2IA.$$

Tính toạ độ của I theo x_A và x_B.

Bài tập 2: Trên trục x'Ox, cho bốn điểm A, B, C, D lần lượt có toạ độ -1, 2, 1, 5. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{2}{\overline{AD}}$$

Bài tập 3: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ 3 và 4.

a. Tìm điểm M biết rằng: $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 0$

b. Tìm điểm N biết rằng: $\overline{NB} - \overline{NA} = 0$

c. Tìm điểm P đối xứng với A qua B.

Bài tập 4: Trên một trục, cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a. $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

b. $\overline{DA}^2.\overline{BC} + \overline{DB}^2.\overline{CA} + \overline{DC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$

CHỦ ĐỀ 2

HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Cho hệ toạ độ đêcac vuông góc Oxy, ta có:

1. VECTƠ

Cho 2 điểm $M_1(x_1, y_1)$, $M_1(x_2, y_2)$ thì $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

2. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Nếu có hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ thì:

(i): $\vec{v}_1=\vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

(ii): $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$.

(iii): $k\,\vec{v}_1(x_1, y_1)=(kx_1, ky_1)$, $k\in R$.

(iv): $\alpha\,\vec{v}_1 \pm \beta\,\vec{v}_2=(\alpha x_1 \pm \beta x_2, \alpha y_1 \pm \beta y_2)$.

(v): $\vec{v}_1.\vec{v}_2=x_1.x_2+y_1.y_2$.

3. KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách d giữa hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_1(x_2, y_2)$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$, được cho bởi:

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

4. CHIA MỘT ĐOẠN THẲNG THEO MỘT TỈ SỐ CHO TRƯỚC

Điểm M(x, y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1-kx_2}{1-k} \\ y=\dfrac{y_1-ky_2}{1-k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu k=-1, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}.$$

5. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ba điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$ thẳng hàng nếu (điều kiện cần và đủ):

$$\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

6. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Góc α giữa hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ được xác định bởi:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

BÀI TOÁN 1

TOẠ ĐỘ VECTƠ - TOẠ ĐỘ ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Toạ độ vectơ - toạ độ điểm .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta cần nhớ các kết quả sau:

1 Với hai điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$, ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A),$$

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

2 Với hai vectơ $\vec{a}(x_1, y_1)$ và $\vec{b}(x_2, y_2)$, ta có:

$$\vec{a}=x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j},$$

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases},$$

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2).$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biểu diễn vectơ $\vec{a}$ dưới dạng:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j},$$

biết:

a. $\vec{a}(1, -1)$. b. $\vec{a}(5, 0)$. c. $\vec{a}(0, -2)$.

Giải

a. Ta được $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$.

b. Ta được $\vec{a}=5\vec{i}$.

c. Ta được $\vec{a}=-2\vec{j}$.

Ví dụ 2: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{a}$, biết:

a. $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$. b. $\vec{a}=-2\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}$.

c. $\vec{a}=-4\vec{i}$ d. $\vec{a}=\vec{j}$.

Giải

a. Ta được $\vec{a}(3, -4)$.

b. Ta được $\vec{a}(-2, \frac{1}{3})$.

c. Ta được $\vec{a}(4, 0)$.

d. Ta được $\vec{a}(0, 1)$.

Ví dụ 3: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết:

a. $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, với $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(3, 4)$, từ đó suy ra độ dài vectơ $\vec{c}$.

b. $\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, với $\vec{a}(-1, 2)$, $\vec{b}(-2, -3)$.

Giải

a. Ta có:

$$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b} = (2, -1) + 3(3, 4) = (2+9, -1+12) = (11, 11).$$

suy ra:

$$|\vec{c}| = \sqrt{11^2 + 11^2} = 11\sqrt{2}.$$

b. Ta có:

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b} = 2(-1, 2) - 5(-2, -3) = (-2 + 10, 4 + 15) = (8, 19).$$

Ví dụ 4: Cho hai điểm $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$.

a Xác định toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

b Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM}(3, 0)$.

c Tìm toạ độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA}(1, 1)$.

Giải

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(2, 2)$ và , $\overrightarrow{BA}(-2, -2)$.

b. Giả sử $M(x, y)$, khi đó:

$$\overrightarrow{BM}(x-1, y-3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M(4, 3).$$

c. Giả sử $N(x, y)$, khi đó:

$$\overrightarrow{NA}(-1 - x, 1 - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - x = 1 \\ 1 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(-2, 0).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{a}$, biết:

a. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

b. $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$.

c. $\vec{a} = 3\vec{i}$

d. $\vec{a} = -5\vec{j}$.

Bài tập 2: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết:

a. $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, với $\vec{a}(1, -1)$, $\vec{b}(-2, 3)$.

☐ $\vec{c}(10, 11)$. ☐ $\vec{c}(11, 9)$. ☐ Khác.

b. $\vec{c} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, với $\vec{a}(-2, 3)$, $\vec{b}(4, -1)$.

☐ $\vec{c}(8, \frac{11}{2})$. ☐ $\vec{c}(8, -\frac{19}{2})$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. $\vec{c}(10, 11)$.

b. $\vec{c}(8, -19/2)$.

BÀI TOÁN 2
BIỂU DIỄN VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta đã biết được hai phương pháp giải dạng toán này trong chủ đề 1. Bây giờ chúng ta sẽ có được phương pháp 3 được miêu tả trong bài toán sau:

Bài toán : Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}(c_1, c_2)$ theo các vectơ $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (1)$$

Bước 2: Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2).$$

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \end{cases} \qquad (I)$$

Giải hệ (I), ta nhận được giá trị của cặp (α, β)

Bước 3: Kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, biết:

a. $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(-3, 4)$ và $\vec{c}(-4, 7)$.

b. $\vec{a}(1, 1)$, $\vec{b}(2, -3)$ và $\vec{c}(-1, 3)$.

Giải

a. Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(2, -1) + \beta(-3, 4) = (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 4\beta).$$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -4 = 2\alpha - 3\beta \\ 7 = -\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

b. Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (2)$$

Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(1, 1) + \beta(2, -3) = (\alpha + 2\beta, \alpha - 3\beta).$$

Khi đó (2) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -1 = \alpha + 2\beta \\ 3 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \beta = -\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Vậy $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$.

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A(1, 1), B(2, -1), C(4, 3) và D(16, 3). Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

Giải

Giả sử:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Ta có:

$\overrightarrow{AD}(15, 2)$, $\overrightarrow{AB}(1, -2)$, $\overrightarrow{AC}(3, 2)$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \alpha(1, -2) + \beta(3, 2) = (\alpha + 3\beta, -2\alpha + 2\beta)$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 15 \\ -2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, Biết:

a. $\vec{a}(-4, 3)$, $\vec{b}(-2, -1)$ và $\vec{c}(0, 5)$.

☐ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$. ☐ $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. ☐ Khác.

b. $\vec{a}(4, 2)$, $\vec{b}(5, 3)$ và $\vec{c}(2, 0)$.

☐ $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. ☐ $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho bốn điểm A(0, 1), B(2, 0), C(-1, 2) và D(6, -4). Tìm cặp số α, β, biết rằng:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

☐ α=1 & β=-3. ☐ α=3 & β=1. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

b. $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Bài tập 2: α=1 & β=-3.

BÀI TOÁN 3

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ, ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ, độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử M(x, y).

Bước 2: Toạ độ hoá các vectơ có trong đẳng thức hoặc sử dụng công thức về khoảng cách giữa hai điểm, để chuyển đẳng thức về biểu thức đại số.

Bước 3: Giải phương trình hoặc hệ trên, ta nhận được toạ độ của M.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết A(1, 0), B(-3, -5), C(0, 3).

a. Xác định toạ độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b. Xác định toạ độ điểm F sao cho AF = CF = 5.

c. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})-3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|. \qquad (1)$$

Giải

a. Giả sử E(x, y), khi đó:

$\overrightarrow{AE}(x-1, y)$, $\overrightarrow{BC}(3, 8)$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2.3 \\ y=2.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=16 \end{cases} \Leftrightarrow E(7, 16).$$

b. Giả sử F(x, y), khi đó:

$$AF=CF=5 \Leftrightarrow \begin{cases} AF^2=25 \\ CF^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=25 \\ x^2+(y-3)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=25 \\ x=3y-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2-30y=0 \\ x=3y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3 \end{array}\right. \\ x=3y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \,\&\, y=0 \\ x=5 \,\&\, y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1(-4,0) \\ F_2(5,3) \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm $F_1(-4, 0)$ và $F_2(5, 3)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử M(x, y), khi đó:

$\overrightarrow{MA}(1-x, -y)$, $\overrightarrow{MB}(-3-x, -5-y)$, $\overrightarrow{MC}(-x, 3-y)$

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})-3\overrightarrow{MC}=(-x-4, -y-19)$ & $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(-3, -8)$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (-x-4)^2+(-y-19)^2=(-3)^2+(-8)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y+19)^2=73.$$

Đặt I(−4, −19), ta được:

$IM^2=73 \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I(-4, -19), bán kính $R=\sqrt{73}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết A(-1,3), B(2,4), C(0,1). Tìm toạ độ:

a. Trọng tâm G của ΔABC.

b. Vectơ trung tuyến $\overrightarrow{AA_1}$.

c. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d. Điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

Giải

a. Ta có:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}[(3, 1)+(1, -2)] = \frac{1}{2}(4, -1) = (2, -\frac{1}{2}).$$

Cách 2: Vì A_1 là trung điểm BC nên $A_1(1, \frac{5}{2})$, suy ra $\overrightarrow{AA_1} = (2, -\frac{1}{2})$.

Cách 3: Ta có $\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) = (2, -\frac{1}{2})$.

c. Giả sử I(x, y) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Leftrightarrow$ AI=BI=CI

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/14 \\ y = 37/14 \end{cases}$$

Vậy $I(\frac{11}{14}, \frac{37}{14})$.

d. Giả sử D(x, y), khi đó để ABCD là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x+1, y-3) = (-2, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy toạ độ D(-3, 0).

Ví dụ 3: Cho điểm M(1+2t, 1+3t). Tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Giải

Ta có:

$$x_M^2 + y_M^2 = (1+2t)^2 + (1+3t)^2 = 13t^2 + 10t + 2 = 13(t + \frac{5}{13}) + \frac{1}{13} \geq \frac{1}{13}.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = \frac{1}{13}$ đạt được khi $t = -\frac{5}{13} \Rightarrow M(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết A(4, 6), B(1, 4), $C(7, \frac{3}{2})$.

a. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.

b. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $I(\frac{11}{4}, 4)$. ☐ $I(4, \frac{11}{4})$. ☐ Khác.

c. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}|.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết A(1, -2), B(0, 4), C(3, 2). Tìm toạ độ của:

a. Trọng tâm G của ΔABC.

☐ G(4/3, -4/3). ☐ G(4/3, 4/3). ☐ Khác.

b. Vectơ trung tuyến $\overrightarrow{AA_1}$.

☐ $\overrightarrow{AA_1}$ (2, 5). ☐ $\overrightarrow{AA_1}$ (1/2, 5). ☐ Khác.

c. Điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

☐ D(4, -4). ☐ D(4, 4). ☐ Khác.

d. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ I(1/8, 15/16). ☐ I(15/16, 1/8). ☐ Khác.

e. Điểm M biết $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

☐ M(5, 2). ☐ M(-5, 2). ☐ Khác.

f. Điểm N biết $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

☐ N(11, 2). ☐ N(1, -2). ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết A(-3, 6), B(1, -2), C(6, 3).

a. Trọng tâm G của ΔABC.

☐ G(4/3, 7/3). ☐ G(7/3, 4/3). ☐ Khác.

b. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ I(−1, 3). ☐ I(1, 3). ☐ Khác.

c. Điểm M biết $2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}$.

☐ M(2, 7). ☐ M(20, 5). ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ba điểm A(0, 3), B(4, 6), C(3, 3).

a. Xác định toạ độ điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

☐ D(1, 0). ☐ D(−1, 0). ☐ Khác.

b. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB, BD sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{DB}=(k+1)\overrightarrow{NB}$, với $k\in N^*$. CMR đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi k thay đổi.

Bài tập 5: Cho điểm A(3, 1).

a. Tìm toạ độ điểm B và C sao cho OABC là hình vuông và điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất.

b. Viết phương trình hai đường chéo và tâm của hình vuông.

Bài tập 6: Cho điểm M(1 − 2t, 1 + t). Tìm điểm M sao cho $x_M^2+y_M^2$ nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: ΔABC vuông tại A và I là trung điểm BC nên I$(4, \frac{11}{4})$.

Bài tập 2: G$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$; $\overrightarrow{AA_1}$ $(\frac{1}{2}, 5)$; D(4, −4); I$(\frac{1}{8}, \frac{15}{16})$; M(−5, 2); N(11, 2).

Bài tập 3: G$(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$; I(1, 3); M(20, 5).

Bài tập 4: D(−1, 0).

BÀI TOÁN 4

VECTƠ CÙNG PHƯƠNG BA ĐIỂM THẲNG HÀNG - ĐỊNH LÝ MENELAUS

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Vectơ cùng phương - Ba điểm thẳng hàng - Định lý menelaus

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cần nhớ các kết quả sau:

a. Với hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ ta có:

$$\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

b. Cho ba điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$, ta có:

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

c. ***Định lý Menelaus***

Lấy ba điểm M, N, P theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ba điểm A(0, 4), B(3. 2) và D(3, 0).

a. CMR A, B, C thẳng hàng, biết rằng C(-6-3t, 8+2t).

b. CMR A, B, D không thẳng hàng, từ đó tính chu vi ΔABD.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}(3, -2) \ \& \ \overrightarrow{AC}(-6-3t, 4+2t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = -(2+t)\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.}$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AD}(3, -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AD} \text{ không cùng phương}$$

$$\Leftrightarrow A, B, C \text{ không thẳng hàng.}$$

Khi đó:

$$CV_{\Delta ABD} = AB + AD + DB = \sqrt{9+4} + \sqrt{9+16} + \sqrt{4} = 7 + \sqrt{13}.$$

Ví dụ 2: Cho hai điểm A(2, 1) và B(6, -1). Tìm toạ độ:

a. Điểm $M \in Ox$ sao cho A, B, M thẳng hàng.

b. Điểm $N \in Oy$ sao cho A, B, N thẳng hàng.

c. Điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Giải

a. Vì $M \in Ox$ nên giả sử M(x, 0), khi đó:

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow M(4, 0).$$

b. Vì $N \in Oy$ nên giả sử $N(0, y)$, khi có:

A, B, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(4, -2) // \overrightarrow{AN}(-2, y-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{-2} = \frac{-2}{y-1} \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow N(0, 2).$$

c. Giả sử $P(x, y)$, khi có từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4,-2) // \overrightarrow{AP}(x-2, y-1) \\ AP = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} = -\dfrac{2}{y-1} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ (4 - 2y - 2)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(6,-1) \text{ loại} \\ P(-2,3) \end{array}\right. \Rightarrow P(-2,3).$$

Ví dụ 3: (ĐHNN-97): Cho ba điểm $A(1, 1)$; $B(3, 3)$; $C(2, 0)$.

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$AB^2=4+4=8$,

$BC^2=1+9=10$,

$CA^2=1+1=2$

$\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Vậy diện tích ΔABC được cho bởi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2} = 2 \text{ (đvdt)}.$$

b. Góc $\angle AMB$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \angle AMB=0^0 \Leftrightarrow$ A, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_M - 1}{3-1} = \frac{-1}{3-1} \Leftrightarrow x_M=0 \Rightarrow M \equiv O.$$

Ví dụ 4: (Đề 97-Va): Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

a. $A(1, 1)$ và $B(2, -4)$.

b. $A(1, 2)$ và $B(3, 4)$.

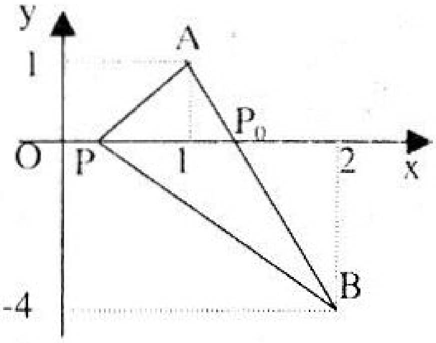
Giải

a. Nhận xét A, B khác phía với Ox.

Gọi $P_0 = (AB) \cap Ox$

$\Leftrightarrow$ A, B, $P_0(x, 0)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow P_0\left(\frac{6}{5}, 0\right).$$



Ta có

$$PA+PB \geq AB.$$

Vậy PA+PB nhỏ nhất khi và chỉ khi A, B, P thẳng hàng <-> $P \equiv P_0$.

b. Nhận xét A, B cùng phía với Ox.

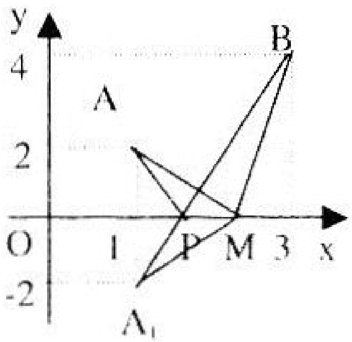
Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox, suy ra $A_1(1, -2)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$

$\Leftrightarrow A_1, B, P_0(x, 0)$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B} // \overrightarrow{A_1P_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow P_0\left(\frac{5}{3}, 0\right).$$



Ta có

$$PA+PB = PA_1+PB \geq A_1B.$$

Vậy PA+PB nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1$, B, P thẳng hàng <-> $P \equiv P_0$.

Chú ý:

1: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp giải cho một lớp bài toán cực trị rất quen thuộc trong các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học và cao đẳng, do đó các em học sinh cần nắm được phương pháp giải cho bài toán tổng quát.

2: Ngoài phương pháp trên chúng ta sẽ còn nhận được một phương pháp giải khác được minh hoạ trong bài toán " *Phương pháp toạ độ hoá* ".

Ví dụ 5: Cho điểm M(4, 1), hai điểm A(a, 0), B(0, b) với a, b>0 sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định toạ độ của A, B sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA+OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Vì A, B, M thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{4-a}{-a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1. \qquad (1)$$

a. Ta có, diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{ab}{2}.$$

Từ (1) suy ra

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Vậy $S_{Min} = 8$, đạt được khi:

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(8,0) \\ B(0,2) \end{cases}.$$

b. Từ (1), ta được :

$$a=\frac{4b}{b-1} \Rightarrow \text{điều kiện } b>1.$$

Khi đó:

$$OA+OB=\frac{4b}{b-1}+b=\frac{4}{b-1}+b+4=\frac{4}{b-1}+b-1+5\geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)}+5=9.$$

Vậy $(OA+OB)_{Min}=9$, đạt được khi:

$$\frac{4}{b-1}=b-1=2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6,0) \\ B(0,3) \end{cases}.$$

c. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$(4^2+1^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{17}.$$

Vậy $\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\right)_{Min}=\frac{1}{17}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ 4a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{17}{4} \\ b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\frac{17}{4},0) \\ B(0,17) \end{cases}.$$

Ví dụ 6: (***Định lý Pascal***): Cho lục giác nội tiếp ABCDEF. CMR ba giao điểm của các cặp cạnh đối của lục giác thẳng hàng.

Giải

Gọi P, M, N, U, I, K theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DE, CD và FA, BC và EF, AB và EF, AB và CD, ta cần đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Sử dụng kết quả của định lý Menelaus vào ΔIKU, theo ba bộ:

- Với bộ P, D, E, ta được:

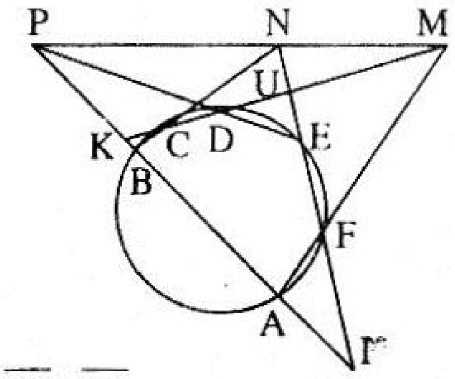
$$\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KD}}{\overline{UD}}.\frac{\overline{UE}}{\overline{IE}}=1.$$

- Với bộ A, M, F, ta được:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UF}}{\overline{IF}}.\frac{\overline{IA}}{\overline{KA}}$$

- Với bộ B, C, N, ta được

$$\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}\frac{\overline{IB}}{\overline{KB}}.\frac{\overline{KC}}{\overline{UC}}=1.$$



Suy ra:

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{UD.UC}{UE.UF}=\frac{IF.IE}{IA.IB}=\frac{KB.KA}{KC.KD}=1,$$

do đó:

$$\left|\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}\right|=1$$

Vì dấu của mỗi trong sáu nhân tử ở vế phải của (1) là âm, do đó

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}=1.$$

Như vậy:

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}=1 \Leftrightarrow \text{M, N, P thẳng hàng.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A(-1, -4) và B(3, 4). Tìm toạ độ:

a. Điểm $M \in Ox$ sao cho A, B, M thẳng hàng.

☐ M(1, 0). ☐ M(0, 1). ☐ Khác.

b. Điểm $N \in Oy$ sao cho A, B, N thẳng hàng.

☐ N(1, 2). ☐ N(0, -2). ☐ Khác.

c. Điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA=3\sqrt{5}$.

☐ P(2, 2). ☐ P(-4, -10). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ba điểm A(1, 3); B(3, 1); C(2, 4).

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Bài tập 3: Tìm trên đường thẳng (d): $x+y=0$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

a. A(1, 1) và B(-2, -4).

b. A(1, 1) và B(3, -2).

Bài tập 4: Cho điểm M(2, 1), hai điểm A(a, 0), B(0, b) với a, b>0 sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định toạ độ của A, B sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA+OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài tập 5: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Trên (d_1) lấy các điểm A, C, E và trên (d_2) lấy các điểm B, D, F sao cho các cặp đường thẳng AB và DE, CD và AF, EF và BC theo thứ tự cắt nhau tại M, N, P. CMR M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 6: (***Đường thẳng Simson***): Từ điểm E bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, hạ EM, EN, EP theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng AB, BC, CA. CMR M, N, P thẳng hàng.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: M(1, 0); N(0, -2); $P_1(2, 2)$ và $P_2(-4, -10)$.

BÀI TOÁN 5

ĐIỂM CHIA ĐOẠN THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm toạ độ của điểm chia đoạ thẳng theo tỷ số k.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Điểm M(x, y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu k=-1, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

Sử dụng các kết quả trên kết hợp với các điều kiện cho trước, ta tính được toạ độ điểm cần tìm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ba điểm A(-4, -1), B(-2, 0) và C(2, 2).

a. Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm tỉ số mà điểm B chia đoạn AC.

Giải

a. Ta có:

$\overrightarrow{BA}(-2, -1)$, $\overrightarrow{BC}(4, 2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

b. Gọi k là tỉ số mà điểm B chia đoạn AC, ta được:

$$k = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hai điểm A(0, 2) và B(4, -3). Tìm toạ độ:

a. Trung điểm I của AB.

b. Điểm M, sao cho $MA + 2MB = \vec{0}$.

Giải

a. Ta có $I(2, -\frac{1}{2})$.

b. Từ giả thiết

$MA + 2MB = \vec{0} \Leftrightarrow MA - 2MB$

$\Leftrightarrow$ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k=-2

Do đó:

$$M:\begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}).$$

Chú ý: Ta cũng có thể trình bày theo cách:

Giả sử M(x,y), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-x, 2-y) \\ \overrightarrow{MB} = (4-x, -3-y) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (8-3x, -4-3y).$$

Vì $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, nên:

$$\begin{cases} 8-3x = 0 \\ -4-3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy toạ độ của điểm $M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết A(-1, -1), B(2, 4), C(6, 1). Lấy các điểm M, N, P trên các đường thẳng AB, CA, BC sao cho các điểm đó lần lượt chia các đoạn thẳng theo các tỉ số -1, $-\frac{1}{2}$, 2.

a. Xác định toạ độ của M, N, P.

b. Chứng tỏ rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải

a. Ta có:

- M(x, y) chia đoạn AB theo tỉ số -1

  $\Leftrightarrow$ M là trung điểm AB $\Leftrightarrow M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- N(x, y) chia đoạn CA theo tỉ số $\frac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow 2(6-x, 1-y) = -(-1-x, -1-y)$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(6-x) = 1+x \\ 2(1-y) = 1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow N(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}).$$

- P(x, y) chia đoạn BC theo tỉ số 2

  $\Leftrightarrow$ C là trung điểm BP $\Leftrightarrow$ P(10, -2).

b. Ta có:

$\overrightarrow{MP}(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$ & $\overrightarrow{NP}(\frac{19}{3}, -\frac{7}{3})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết $A(1, -3)$, $B(3, -5)$, $C(2, -2)$. Tìm toạ độ:

a. Giao điểm E của BC với phân giác trong của góc A.

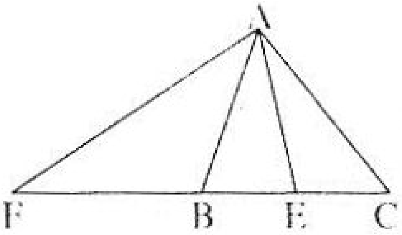
b. Giao điểm F của BC với phân giác ngoài của góc A.

Giải

Ta có:

$$AB^2=4+4=8 \ \& \ AC^2=1+2=2$$

$$\Rightarrow k=\frac{AC}{AB}=2.$$



a. Giả sử $E(x, y)$, theo tính chất phân giác trong, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}}=-2 \Leftrightarrow \overrightarrow{EC}(2-x, -2-y)=-2\overrightarrow{EB}(3-x, -5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=-2(3-x) \\ -2-y=-2(-5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow E(\frac{4}{3}, -4).$$

b. Giả sử $F(x, y)$, theo tính chất phân giác ngoài, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FB}}=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{FC}(2-x, -2-y)=2\overrightarrow{FB}(3-x, -5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=2(3-x) \\ -2-y=2(-5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow F(4, -8).$$

Ví dụ 5: (ĐH Khối A - 2002): Cho ΔABC vuông tại A, biết $A(a, 0)$, $B(1, 0)$, $C(a, a\sqrt{3}-\sqrt{3})$. Xác định toạ độ trọng tâm G của ΔABC, biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2.

Giải

Ta có $G(\frac{2a+1}{3}, \frac{a-1}{\sqrt{3}})$.

Với nhận xét:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=p.r \Leftrightarrow AB.AC=2(AB+AC+BC)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}|a-1|.|a-1|=2(|a-1|+\sqrt{3}|a-1|+2|a-1|)$$

$$\Leftrightarrow |a-1|=2+2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3+2\sqrt{3} \\ a=-1-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

- Với $a=3+2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}, \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.
- Với $a=-1-2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}, \frac{-2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.

Vậy tồn tại hai điểm G thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A(1, 2) và B(3, 6). Tìm toạ độ:

a. Trung điểm I của AB.

☐ I(2, 4). ☐ I(4, 2). ☐ Khác.

b. Điểm C đối xứng với A qua B.

☐ C(-5, 1). ☐ C(5, 10). ☐ Khác.

c. Điểm M, sao cho $3MA - 2MB = \vec{0}$.

☐ M(6, 3). ☐ M(-3, -6). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết A(0, 2), B(1, 1), C(-1, -2). Lấy các điểm M, N, P trên các đường thẳng AB, BC, CA sao cho các điểm đó lần lượt chia các đoạn thẳng theo các tỉ số -1, $\frac{1}{2}$, -2.

a. Xác định toạ độ của M, N, P.

☐ $M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, N(3, -4), $P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ☐ $M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, N(3, 4), $P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

b. Chứng tỏ rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết $M(\frac{1}{2}, 4)$, $N(-3, \frac{9}{2})$, $P(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C.

☐ A(2, 2), B(-1, 6), C(-5, 3). ☐ A(-1, 6), B(2, 2), C(-5, 3).

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết A(-1, 1), B(3, -2), C(5, -7). Tìm toạ độ:

a. Giao điểm E của BC với phân giác trong của góc A.

☐ $E(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3})$. ☐ $E(-\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$. ☐ Khác.

b. Giao điểm F của BC với phân giác ngoài của góc A.

☐ F(3, 1). ☐ F(1, 3). ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết A(-2, 3), B(2, 0), $C(\frac{1}{4}, 0)$. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác.

☐ $I(1, \frac{1}{2})$. ☐ $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. I(2, 4).

b. C(5, 10).

c. M(-3, -6).

Bài tập 2: $M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, N(3, 4), $P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Bài tập 3: A(2, 2), B(-1, 6), C(-5, 3).

Bài tập 4: $E(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3})$ & F(1, 3).

Bài tập 5: $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

BÀI TOÁN 6

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HOÀ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Hàng điểm điều hoà.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bốn điểm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ lập thành hàng điểm điều hoà (ký hiệu (ABCD)=-1)

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_A + x_B)(x_C + x_D) = 2(x_A.x_B + x_C.x_D)\\(y_A + y_B)(y_C + y_D) = 2(y_A.y_B + y_C.y_D)\end{cases}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 3 điểm $A(0, -1)$, $B(2, 3)$, $C(\frac{1}{2}, 0)$.

a. CMR A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm toạ độ điểm D sao cho A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{CA}\,(-\frac{1}{2}, -1),\ \overrightarrow{CB}\,(\frac{3}{2}, 3) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \text{A, B, C thẳng hàng}$$

b. Giả sử D(x, y), khi đó bốn điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2 - x = 3(-x)\\3 - y = 3(-1 - y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\y = -3\end{cases} \Leftrightarrow D(-1, -3).$$

Vậy D(-1, -3).

Ví dụ 2: (***Hệ thức Newton***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi:

$$IA^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}\,.$$

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết $A(2, 3)$, $B(\frac{1}{2}, 0)$, $C(-1, -3)$.

Giải

Ta có A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AI} + \overline{IC}}{\overline{AI} + \overline{ID}} = -\frac{\overline{BI} + \overline{IC}}{\overline{BI} + \overline{ID}} = -\frac{-\overline{AI} + \overline{IC}}{-\overline{AI} + \overline{ID}}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AI} + \overline{IC})(-\overline{AI} + \overline{ID}) = -(\overline{AI} + \overline{ID})(-\overline{AI} + \overline{IC})$$

$$\Leftrightarrow IA^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}\ \text{, dpcm.}$$

Áp dụng kết quả trên ta nhận được D(0, -1) - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 3: (***Hệ thức Mac Laurin***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi:

$$\overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\overline{CI}\text{, với I là trung điểm của AB.}$$

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết A(2, 3), B(0, -1), C(-1, -3).

Giải

Áp dụng hệ thức Descartes, ta có A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB} + \overline{CA}}{\overline{CA}.\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\frac{\overline{CB} + \overline{CA}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\overline{CI}\text{, đpcm.}$$

Áp dụng kết quả trên ta nhận được D($\frac{1}{2}$, 0) - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ba điểm A(0, -1), B(-1, -3), C($\frac{1}{2}$, 0).

a. CMR A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

☐ D(2, 3). ☐ D(-2, 3). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, trực tâm H, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi E, F, P theo thứ tự là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và A_1C_1, CC_1 và A_1B_1. CMR bộ 4 điểm sau lập thành hàng điểm điều hoà:

a. A, H, E, A_1.

b. B, H, F, B_1.

c. C, H, P, C_1.

Bài tập 3: Cho 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà. CMR:

a. $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0$.

b. $AB^2 + CD^2 = 4EF^2$, với E, F theo thứ tự là trung điểm AB, CD.

Bài tập 4: (***Hệ thức Descartes***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết A(0, -1), B(2, 3), C($\frac{1}{2}$, 0).

Bài tập 5: (***Định lý Ceva***): Cho ΔABC. CMR điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng xuất phát từ ba đỉnh A, B, C đồng quy là các giao điểm A_1, B_1, C_1 của chúng với các cạnh đối diện thoả mãn:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: D(2, 3).

BÀI TOÁN 7

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ HOÁ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Phương pháp toạ độ hoá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp toạ độ hoá thường được sử dụng phổ biến trong hai dạng:

Dạng 1: Ta thực hiện phép toạ độ hoá các điểm trong hình và đưa bài toán hình học về dạng giải tích.

Dạng 2: Lựa chọn các điểm thích hợp để biến đổi biểu thức đại số về dạng độ dài hình học - Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức đại số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

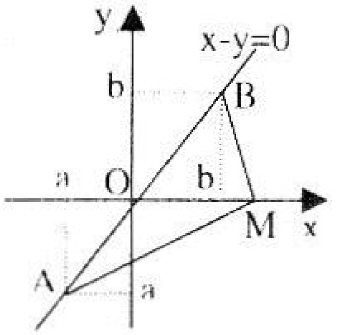
$$y=\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+\sqrt{x^2-2bx+2b^2},$$

với a, b là các hằng số thoả mãn $a<0$ và $b>0$.

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y=\sqrt{(x-a)^2+a^2}+\sqrt{(x-b)^2+b^2}$$



Xét ba điểm A(a, a), B(b, b) và M(x, 0), ta có:

$$MA=\sqrt{(x-a)^2+a^2} \text{ và } MB=\sqrt{(x-b)^2+b^2},$$

suy ra:

$$y=\sqrt{(x-a)^2+a^2}+\sqrt{(x-b)^2+b^2}=MA+MB\geq AB=\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{2}\,(b-a)$$

Vậy $y_{Min}=\sqrt{2}\,(b-a)$, đạt được khi

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow M\equiv O$.

Chú ý: Phương pháp trên đương nhiên được mở rộng cho trường hợp biểu thức hai biến x, y. Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}.$$

Giải

Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$S=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}.$$

Xét các điểm A(-1, 2), B(3, 2) và M(x, y), khi đó:

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \text{ và } BM=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},$$

suy ra:

$$S=AM+BM\geq AB=4$$

Vậy $S_{Min}=4$, đạt được khi

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{0} \Leftrightarrow y=2$,

và khi đó:

$$S=|x+1|+|x-3|=|x+1|+|3-x|\geq|x+1+3-x|=4,$$

dấu "=" xảy ra khi

$$(x+1)(3-x)\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3.$$

Vậy $S_{Min}=4$, đạt được khi:

$$\begin{cases}-1\leq x\leq 3\\ y=2\end{cases}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số :

a. $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

b. $y=\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-2x+2}$.

c. $y=|x+1|.\sqrt{5}+\sqrt{5x^2-14x+13}$.

d. $y=\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+\sqrt{x^2-2bx+2b^2}$, với a, $b\in R$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+2}+\sqrt{\cos^2\alpha+6\cos\alpha+13}.$$

Bài tập 3: Cho ba điểm A(0, 6), B(2, 5) và M(2t-2, t). Toạ độ điểm M sao cho:

a. (MA+MB) nhỏ nhất.

b. |MA – MB| lớn nhất.

Bài tập 4: Cho ba điểm A(1, 2), B(2, 5) và M(2t+2, t). Toạ độ điểm M sao cho:

a. (MA+MB) nhỏ nhất.

b. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

c. |MA – MB| nhỏ nhất.

d. |MA – MB| lớn nhất.

BÀI TOÁN 8

BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Sử dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng kết quả: nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ và α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì:

- $\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.
- $\cos\alpha = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai vectơ $\vec{a}(1, 1)$ và $\vec{b}(2, 1)$.

a. Tính cos, sin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b. Hãy xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết rằng:

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = -1 \ \& \ (\vec{a} + 2\vec{c}).\vec{b} = 1.$$

Giải

a Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{1..2 + 1.1}{\sqrt{1+1}.\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

b Giả sử $\vec{c}(x, y)$, từ giả thiết suy ra:

$$-1 = (\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = (3, 2)(x, y) = 3x + 2y. \quad (1)$$

$$1 = (\vec{a} + 2\vec{c}).\vec{b} = (1+2x, 1+2y)(2, 1) = 2(1+2x) + 1 + 2y \Leftrightarrow 2x + y = -1. \quad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1) và (2), ta được:

$$x = -1 \ \& \ y = 1 \Rightarrow \vec{c}(-1, 1).$$

Ví dụ 2: Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}).$$

Giải

Giả sử $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, từ giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ a_1.b_1 + a_2.b_2 = 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = (3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2).(2a_1 + 5b_1, 2a_2 + 5b_2)$$

$$= (3a_1-4b_1)(2a_1+5b_1)+(3a_2-4b_2)(2a_2+5b_2)$$
$$= 6(a_1^2 + a_2^2) - 20(b_1^2 + b_2^2) + 7(a_1b_1 + a_2b_2)$$
$$= 6 - 20 + 7 = -7.$$

Chú ý: Bài toán trên cũng có thể giải bằng tích vô hướng thuần tuý, cụ thể:

Từ giải thiết, suy ra:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = 4 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 1.$$

Ta có:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a}.\vec{b} = 6 - 20 + 7 = -7.$$

Lời giải trên đơn giản hơn nhiều so với việc toạ độ hoá, từ đó các em học sinh cần hiểu rằng mục đích chính của nhiều ví dụ chỉ mang tính minh hoạ.

Ví dụ 3: Cho hai điểm A(3, 1), B(4, 2). Tìm toạ độ điểm M sao cho:

$$AM = 2 \text{ và } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^0.$$

Giải

Giả sử M(x, y), suy ra

$$\overrightarrow{AM}(x - 3, y - 1) \;\&\; \overrightarrow{AB}(1, 1).$$

Khi đó:

$$AM = 2 \Leftrightarrow AM^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4. \quad (1)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^0 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AM}|} = \cos 135^0 \Leftrightarrow \frac{x - 3 + 5(y - 1)}{2\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 5y - 8 = -2 \Leftrightarrow x = 6 - 5y. \quad (2)$$

thay (2) vào (1), ta được:

$$(6-5y-3)^2+(y-1)^2=4 \Leftrightarrow 13y^2-16y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{3}{13} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \;\&\; y = 1 \\ x = \dfrac{63}{13} \;\&\; y = \dfrac{3}{13} \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm $M_1(1, 1)$ và $M_2(\frac{63}{13}, \frac{3}{13})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Cho ba điểm A(7, 4), B(0, 3), C(4, 0). Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên BC, từ đó suy ra toạ độ điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC.

Giải

H(x, y) là hình chiếu vuông góc của A lên BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 7, y - 4).(4, -3) = 0 \\ (x, y - 3) \,//\, (4, -3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 7) - 3(y - 4) = 0 \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y - 3}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy H(4, 0).

Điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC

$$\Leftrightarrow H \text{ là trung điểm } AA_1 \Leftrightarrow A_1(1, -4).$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biết $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -1)$.

a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b Tính cos và sin góc A.

c Tìm toạ độ chân đường cao A_1 của ΔABC.

d Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

e Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

f Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, từ đó chứng minh rằng I, H, G thẳng hàng.

Giải

a Ta có $\overrightarrow{AB}(-2, -1)$, $\overrightarrow{AC}(4, -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2.4-1.(-3) = -5$.

b Ta có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{5}.\sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

c $A_1(x, y)$ là chân đường cao từ đỉnh A của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA_1} \mathbin{//} \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \mathbin{//} \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1, y-2).(6, -2) = 0 \\ (x+1, y-1) \mathbin{//} (6, -2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2(y-2) = 0 \\ \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy $A_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

d $H(x, y)$ là trực tâm H của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1, y-2).(6, -2) = 0 \\ (x+1, y-1).(4, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy H(2, 5).

e Toạ độ trọng tâm $G(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

f $I(x, y)$ là tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Leftrightarrow AI = BI = CI$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3/2 \end{cases}.$$

Vậy $I(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

Nhận xét rằng

$$\overrightarrow{GH}(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}) \;\&\; \overrightarrow{IH}(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}) \Rightarrow \text{I, H, G thẳng hàng.}$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC, Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0. \qquad (1)$$

Giải

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, khi đó ta cần tìm tập hợp những điểm $M(x, y)$ thoả mãn (1).

Từ (1), ta được:

$$\begin{aligned}0 &=(x_A-x, y_A-y).(x_B-x, y_B-y)+(x_B-x, y_B-y).(x_C-x, y_C-y)+\\ &\qquad +(x_C-x, y_C-y).(x_A-x, y_A-y)\\ &=(x_A-x).(x_B-x)+(y_A-y).(y_B-y)+(x_B-x).(x_C-x)+(y_B-y).(y_C-y)+\\ &\qquad +(x_C-x).(x_A-x)+(y_C-y).(y_A-y)\\ &=3(x^2+y^2)-2x(x_A+x_B+x_C)-2x(y_A+y_B+y_C)+\\ &\qquad +x_Ax_B+x_Bx_C+x_Cx_A+y_Ay_B+y_By_C+y_Cy_A\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{18}\{[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]+[(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2]+[(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2]\}$$

$$\Leftrightarrow MG^2=\frac{1}{18}(AB^2+BC^2+CA^2)$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm G (là trọng tâm ΔABC), bán kính $R=\dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2+CA^2}}{3\sqrt{2}}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai vectơ $\vec{a}(1, 2)$ và $\vec{b}(-1, 1)$. Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$ biết:

$$\vec{a}.\vec{c}=4 \;\&\; \vec{b}.\vec{c}=-1.$$

☐ $\vec{c}(1, 2)$. ☐ $\vec{c}(2, 1)$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=4$. Hãy xác định:

$$A=(\vec{a}-3\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b}).$$

☐ $A=-53/2$. ☐ $A=26$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ba điểm $A(3, -1)$, $B(-4, 0)$, $C(8, 9)$. Tìm toạ độ

a. Hình chiếu vuông góc H của A lên BC

☐ $H(1, 3)$. ☐ $H(0, 3)$. ☐ Khác.

b. Điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC.

☐ $A_1(-3, 7)$. ☐ $A_1(3, 2)$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC. biết $A(1, 2)$, $B(-2, 6)$, $C(4, 2)$.

a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-9$. ☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-5$. ☐ Khác.

b Tính cos và sin góc A.

☐ $\cos A=\frac{4}{5}$ & $\sin A=-\frac{3}{5}$ ☐ $\cos A=-\frac{3}{5}$ & $\sin A=\frac{4}{5}$ ☐ Khác.

c Tìm toạ độ chân đường cao A_1 của ΔABC.

☐ $A_1(\frac{44}{13}, \frac{25}{13})$. ☐ $A_1(\frac{25}{13}, \frac{44}{13})$. ☐ Khác.

d Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

☐ $G(1, \frac{10}{3})$. ☐ $G(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. ☐ Khác.

e Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

☐ $H(-2, -\frac{5}{2})$. ☐ $H(2, -\frac{5}{2})$. ☐ Khác.

f Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, từ đó chứng minh rằng I, H, G thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho ba điểm A(4, 3); B(2, 7); C(–3, –8).

a. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm T của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b. CMR T, G, H thẳng hàng.

c. Tính diện tích ΔABC.

Bài tập 6: Cho ΔABC. biết A(1, 3), B(5, 1), C(–3, –1).

a. Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

☐ $H(\frac{13}{3}, -\frac{31}{3})$. ☐ $H(\frac{13}{3}, \frac{1}{3})$. ☐ Khác.

b. Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

☐ $K(-\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$. ☐ $K(\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$. ☐ Khác.

Bài tập 7: (Đề 86-Va): Diện tích ΔABC là $S=\frac{3}{2}$; hai đỉnh A(2, -3), B(3, -2) và trọng tâm G của tam giác có toạ độ thoả mãn G(t, 3t-8). Tìm toạ độ đỉnh C.

☐ C(1, –1). ☐ C(–2, –10). ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\vec{c}(1, 2)$.

Bài tập 2: $A = -\frac{53}{2}$.

Bài tập 3: H(0, 3) & $A_1(-3, 7)$.

Bài tập 4:

a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -9$.

b $\cos A = -\frac{3}{5}$ & $\sin A = \frac{4}{5}$

c $A_1(\frac{25}{13}, \frac{44}{13})$.

d $G(1, \frac{10}{3})$.

Bài tập 6: $H(\frac{13}{3}, -\frac{31}{3})$ & $K(-\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$.

Bài tập 7: Tồn tại hai điểm $C_1(1, -1)$, $C_2(-2, -10)$.

CHỦ ĐỀ 3

ĐƯỜNG THẲNG

I. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1: Một vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương (viết tắt vtcp) của đường thẳng (d) nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ đều là vtcp của (d).
- Nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$ là vtcp của đường thẳng (d) thì với $a_1 \neq 0$ ta gọi $k = \frac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của đường thẳng (d).
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtcp của nó và một điểm mà nó đi qua.

II. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 2: Một vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ gọi là vectơ pháp tuyến (viết tắt vtpt) của đường thẳng (d) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là vtpt của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của (d).
- Nếu $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì $\vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$

  Do đó nếu $\vec{n}(A, B)$ thì $\vec{a}(B, -A)$ và ngược lại.
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtpt của nó và một điểm mà nó đi qua.

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có vtcp $\vec{a}(a_1, a_2)$ có phương trình

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in R. \qquad (1)$$

Phương trình (1) với điều kiện $a_1^2 + a_2^2 > 0$ được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu $a_1 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in R$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(0, a_2)$ do đó nó vuông góc với Ox, cắt Ox tại điểm có hoành độ x_0.

2. Nếu $a_2=0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 \end{cases}, t \in R$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1, 0)$ do đó nó vuông góc với Oy, cắt Oy tại điểm có tung độ y_0.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng (d) có phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in R$$

bằng cách khử t từ phương trình tham số của (d), ta được:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \qquad (2)$$

Phương trình (2) với điều kiện $a_1^2 + a_2^2 > 0$ được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng.

Nhận xét: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ có phương trình được xác định như sau:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng (d) có phương trình tổng quát

$$(d): Ax+By+C=0 \qquad (3)$$

với điều kiện $A^2+B^2>0$

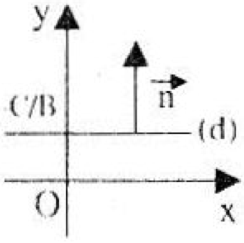
Khi đó đường thẳng (d) có:

- vtpt $\vec{n}(A, B)$.
- vtcp $\vec{a}(B, -A)$.
- hệ số góc $k=-\frac{A}{B}$, với $B \neq 0$.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu $A=0$, ta được:

$$(d): By+C=0 \Leftrightarrow (d): y=-\frac{C}{B}$$



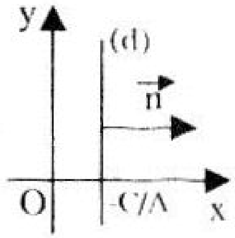
là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(0, B)$ do đó nó vuông góc với Oy, cắt Oy tại điểm có tung độ $-\frac{C}{B}$.

Lưu ý: Bản thân trục Ox có phương trình $y=0$.

2. Nếu B=0, ta được:

$$(d): Ax+C=0 \Leftrightarrow (d): x=-\frac{C}{A}$$

là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(A, 0)$ do đó nó vuông góc với Ox, cắt Ox tại điểm có hoành độ $-\frac{C}{A}$.

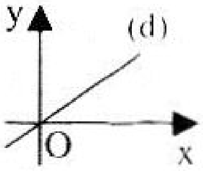


Lưu ý: Bản thân trục Oy có phương trình x=0.

3. Nếu C=0, ta được:

$$(d): Ax+By=0$$

là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(A, B)$ và đi qua gốc toạ độ O.



4. Nếu $A^2+B^2=1$, thì (4) được gọi là *phương trình pháp dạng* của đường thẳng.

Lưu ý: Để đưa phương trình tổng quát của đường thẳng

$$(d): Ax+By+C=0$$

về phương trình pháp dạng ta chỉ cần chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{A^2+B^2}$, rồi đặt:

$$A_0=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ B_0=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \&\ C_0=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình

$$(d_1): A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$(d_2): A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có kết quả:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1)//(d_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1)\equiv(d_2)$.

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2) tại điểm I.

Trong trường hợp này mọi đường thẳng đi qua I đều có dạng:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (4)$$

với $\alpha^2+\beta^2>0$.

Phương trình (4) được gọi là *phương trình của chùm đường thẳng*, điểm I gọi là *tâm của chùm*.

Ta thường dùng phương trình của chùm đường thẳng để giải các bài toán dạng: " *Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng đã cho và thoả mãn thêm điều kiện K* " mà không cần tìm toạ độ giao điểm đó.

5. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Gọi $\alpha=g((d_1),(d_2))$, $0\le\alpha\le90^0$.

- Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), khi đó:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}. \qquad (5)$$

Nhận xét rằng $(d_1)\perp(d_2) \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$.

- Gọi k_1, k_2 theo thứ tự là hệ số góc của (d_1), (d_2) , khi đó:

$$tg\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (6)$$

Nhận xét rằng $(d_1)\perp(d_2) \Leftrightarrow k_1.k_2=-1$.

6. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(x_M, y_M)$ và đường thẳng (d) có

(d): $Ax+By+C=0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M,(d))=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Chú ý: Khoảng cách đại số từ $M(x_M, y_M)$ tới đường thẳng (d) được định nghĩa:

$$t_M=\overline{HM}=\frac{Ax_M+By_M+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

7. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng

(d_1): $A_1x+B_1y+C_1=0$,

(d_2): $A_2x+B_2y+C_2=0$,

Khi đó phương trình hai đường phân giác (Δ_1) và (Δ_2) của các góc tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Chú ý: Nếu (d_1) và (d_2) không vuông góc với nhau thì (d_1) tạo với (d_2) hai góc nhọn và hai góc tù, khi đó ta có thể xác định phương trình đường phân giác của góc nhọn hoặc góc tù nhờ kết quả trong bảng sau:

Dấu của $\vec{n}_1.\vec{n}_2$	Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi (d_1), (d_2) ứng với	Phương trình đường phân giác góc tù tạo bởi (d_1), (d_2) ứng với
-	$t_1=t_2$	$t_1=-t_2$
+	$t_1=-t_2$	$t_1=t_2$

trong đó:

- $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ theo thứ tự là vtpt của (d_1), (d_2).
- t_1, t_2 theo thứ tự là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ tới (d_1), (d_2)

BÀI TOÁN 1

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định phương trình là phương trình đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình

$$Ax+By+C=0$$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi $A^2+B^2>0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình

$$mx + (m-2)y - m = 0. \qquad (1)$$

a. Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) là phương trình của một đường thẳng, gọi là họ (d_m).

b. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Giải

a. Ta có:

$$A^2+B^2=m^2+(m-2)^2 = 2m^2-4m+4 = 2(m-1)^2+2>0, \forall m.$$

Vậy với mọi m phương trình đã cho là phương trình của một đường thẳng.

b. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow mx_0+(m-2)y_0-m=0, \forall m \Leftrightarrow m(x_0+y_0-1)-2y_0=0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+y_0-1=0 \\ -2y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}.$$

Vậy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(1, 0).

Chú ý:

1. Như vậy để tìm điểm cố định của đường cong phụ thuộc một tham số m, ta thực hiện việc nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0. Tuy nhiên trong trường hợp có hai tham số chúng ta sẽ sử dụng dạng chùm đường thẳng.
2. Một dạng toán rất được quan tâm đối với họ đường thẳng là

" *Cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số m có phương trình*

(d_m): $f(x, y, m)=0$.

Hãy tìm đường cong cố định luôn tiếp xúc với họ (d_m). "

Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Định dạng cho đồ thị cố định, thí dụ:

Parabol là (P): $y=ax^2+bx+c$

Bước 2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị với mọi giá trị của tham số, ta xác định được $y=g(x)$.

Cách 2: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tìm tập hợp các điểm mà họ (d_m) không đi qua. Tập hợp đó được xác định bởi bất phương trình có dạng $h(x, y)<0$.

Bước 2: Ta đi chứng minh họ (d_m) luôn tiếp xúc với đường cong (C) có phương trình $h(x, y)=0$.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): (2m+1)x-y-m^2=0.$$

CMR họ đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.

Giải

Cách 1: Giả sử Parabol (P): $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Điều kiện (d_m) luôn tiếp xúc với (P) là:

phương trình $ax^2+bx+c=(2m+1)x-m^2$ có nghiệm kép $\forall m$

$\Leftrightarrow$ phương trình $ax^2-(2m+1-b)x+m^2+c=0$ có nghiệm kép $\forall m$

$\Leftrightarrow \Delta=0, \forall m \Leftrightarrow (2m+1-b)^2-4a(m^2+c)=0, \forall m$

$\Leftrightarrow 4(1-a)m^2+4m(1-b)+(1-b)^2-4ac=0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ 1-b=0 \\ (1-b)^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Vậy, mọi đường thẳng của họ (d_m) luôn tiếp xúc với Parabol (P): $y=x^2+x$

Cách 2:

- Tìm những điểm trên mặt phẳng mà không thuộc họ (d).

Gọi $M(x, y)$ là điểm không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ (d)

$\Leftrightarrow$ phương trình $(2m+1)x-y-m^2=0$ vô nghiệm $\forall m$

$\Leftrightarrow$ phương trình $m^2-2mx+y-x=0$ vô nghiệm $\forall m$

$\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow x^2+x-y<0$

Vậy, tập hợp các điểm $M(x, y)$ thoả mãn $x^2+x-y<0$ (các điểm thuộc miền trong (P): $y=x^2+x$) không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ (d).

- Ta đi chứng minh (d) luôn tiếp xúc với Parabol (P): $y=x^2+x$.

Thật vậy, xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2m+1).x-y-m^2=0 \\ x^2+x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2mx+m^2=0 \qquad (*)$$

Phương trình (*) có $\Delta=m^2-m^2=0$, nên (d) luôn tiếp xúc với (P).

Vậy, mọi đường thẳng của họ (d_m) luôn tiếp xúc với Parabol (P).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm điều kiện của m để phương trình sau là phương trình một đường thẳng:

$$(m^2-m)x+2my-3m+1=0.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng với mọi m phương trình:

$$mx^2-m^2x+(m-1)xy+my-y^2=0$$

là phương trình của hai đường thẳng.

Bài tập 3: Chứng minh rằng với $B^2-4AC>0$ phương trình:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0$$

là phương trình của hai đường thẳng.

Bài tập 4: CMR các họ đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định:

a. (d_m): $mx+(2-m)y-2=0$

b. $(d_{\alpha,\beta})$: $(\alpha+2\beta)x+3(\alpha-\beta)y+\alpha-7\beta=0$.

Bài tập 5: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): 4x-2my+m^2=0.$$

CMR họ đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.

Bài tập 6: Cho điểm A(0, 2) và điểm B(m, -2).

a. Hãy viết phương trình đường trung trực (d) của AB.

b. CMR (d) luôn tiếp xúc với đường cong cố định khi m thay đổi.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $m\neq 0$.

Bài tập 2: Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$(mx-y)(x+y-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx-y=0 \\ x+y-m=0 \end{array}\right.$$

Vậy với mọi m phương trình đã cho là phương trình của hai đường thẳng (d_1): $mx-y=0$ và (d_2): $x+y-m=0$.

Bài tập 3: Xét hai trường hợp

a. A=0 - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

b. $A\neq 0$, khi đó bằng việc chia hai vế của phương trình cho y, rồi đặt $t=\frac{x}{y}$

ta được $At^2+Bt+C=0$ (*)

từ điều kiện $B^2-4AC>0$ thì (*) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 do đó:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=t_1 \\ \dfrac{x}{y}=t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-t_1y=0 \\ x-t_2y=0 \end{array}\right.$$

, đó là phương trình của hai đường thẳng.

Bài tập 4:

a. M(1, 1).

b. M(2, -1).

Bài tập 5: (P): $x=\frac{1}{4}y^2$.

BÀI TOÁN 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Lập phương trình đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả:

1. Đường thẳng đi qua hai điểm:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Lưu ý:

- Nếu $M_1(a, 0)$ và $M_2(0, b)$ với $a, b \neq 0$ thì phương trình (M_1M_2) được xác định bằng phương trình đoạn chắn:

$$(M_1M_2): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

- Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ luôn có dạng:

$(d): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, với $A^2+B^2>0$.

2. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$$\text{hoặc } (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in R.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(a_1, a_2)$ luôn có dạng:

$(d): a_2x-a_1y+\underline{C}=0$.

3. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtpt:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A, B) \end{cases} \Leftrightarrow (d): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtpt $\vec{n}(n_1, n_2)$ luôn có dạng:

$(d): n_1x+n_2y+\underline{C}=0$.

4. Đường thẳng đi qua một điểm và biết hệ số góc k:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{hsg } k \end{cases} \Leftrightarrow (d): y=k(x-x_0)+y_0$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc k luôn có dạng:

$(d): y=kx+\underline{m}=0$.

5. Đường thẳng $(d)//(\Delta): Ax+By+C=0$ có phương trình:

$(d): Ax + By + \underline{D} = 0$.

6. Đường thẳng $(d)\perp(\Delta): Ax+By+C=0$ có phương trình:

$(d): Bx-Ay+\underline{D}=0$.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng

a. Phương trình chùm đường thẳng.

b. Phương pháp quỹ tích để xác định phương trình đường thẳng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm P(2, 5) và Q(5, 1). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm P sao cho khoảng cách từ Q tới đường thẳng đó bằng 3.

Giải

Đường thẳng (d) đi qua điểm P có phương trình:

$$(d): A(x-2)+B(y-5)=0 \Leftrightarrow (d): Ax+By-2A-5B=0$$

Khoảng cách từ Q tới (d) bằng 3, ta có:

$$\frac{|5A+B-2A-5B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \Leftrightarrow |3A-4B|=3\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow (3A-4B)^2=9(A^2+B^2) \Leftrightarrow 7B^2-24AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=\dfrac{24A}{7} \end{array}\right.$$

- Với B=0, ta được (d_1): x-2=0.
- Với $B=\dfrac{24A}{7}$, ta được (d_2): 7x+24y-134=0.

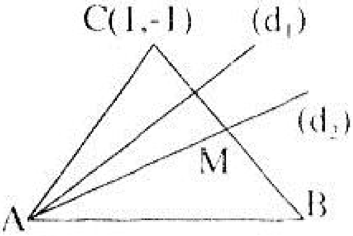
Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1) & (d_2) thoả mãn điều kiện.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết đỉnh C(4, -1), đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình tương ứng là:

$$(d_1): 2x-3y+12=0 \text{ và } (d_2): 2x+3y=0.$$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Giải



- Phương trình cạnh (BC).

Vì $(BC)\perp(d_1)$ nên

(BC): -3x-2y+C=0 (1)

Vì $C\in(BC)$ nên

-3.4-2.(-1)+C =0 ⇔ C=10.

Thay C=10 vào (1), ta được

(BC): 3x+2y-10=0.

- Phương trình cạnh (AC).

Điểm $A=(d_1)\cap(d_2) \Rightarrow$ toạ độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x-3y+12=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 2).$$

Phương trình cạnh (AC) được xác định bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(-3,2) \\ \text{qua } C(4,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \frac{x+3}{4+3}=\frac{y-2}{-1-2}$$

⇔ (AC): 3x+7y-5=0.

- Phương trình cạnh (AB).

Gọi M là trung điểm BC, khi đó điểm $M=(d_2)\cap(BC)$.

Vậy toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+2y-10=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow M(6, -4).$$

Toạ độ điểm B được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = -7 \end{cases}.$$

Phương trình cạnh (AB) được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B(8,-7) \\ \text{qua } A(-3,2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-8}{-3-8} = \frac{y+7}{2+7} \Leftrightarrow (AB): 9x+11y+5=0.$$

Vậy phương trình ba cạnh của ΔABC là:

(AB): $9x+11y+5=0$, (BC): $3x+2y-10=0$, (AC): $3x+7y-5=0$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết A(1, 3) và hai trung tuyến có phương trình là:

$x-2y+1=0$, $y-1=0$.

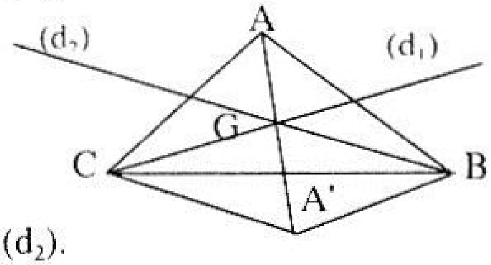
Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Giải

Cách 1: Để có được phương trình các cạnh của ΔABC ta đi xác định toạ độ điểm B, C.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G của ΔABC, khi đó:

$$\begin{cases} A'B \,//\, (d_1) \\ A'C \,//\, (d_2) \end{cases}.$$



Suy ra:

Điểm B là giao điểm của (A'B) và (d_2).

Điểm C là giao điểm của (A'C) và (d_1).

Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó toạ độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$$

- Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G, toạ độ của A' được cho bởi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1, -1).$$

- Toạ độ điểm B.

Phương trình đường thẳng (A'B) được xác định bởi:

$$(A'B): \begin{cases} \text{qua } A' \\ (A'B) \,//\, (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (A'B): \begin{cases} \text{qua } A'(1,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CG}(2,1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (A'B): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow (A'B): x-2y-3=0.$$

Điểm B=(A'B) $\cap (d_2)$, toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5, 1).$$

- Tương tự, ta có toạ độ điểm C(−3, −1).

- Phương trình cạnh AC, được xác định bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow (AC): x-y+2=0.$$

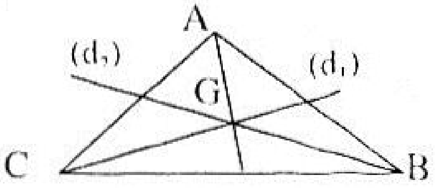
- Tương tự, ta có :

  (AB): $x+2y-7=0$ và (BC): $x-4y-1=0$.

Cách 2: Sử dụng phương trình tham số của đường thẳng

Gọi (d_1): $x-2y+1=0$ là trung tuyến đỉnh C, ta có :

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \end{cases}, t \in R \Rightarrow C(2t-1, t).$$



Gọi (d_2): $y-1=0$ là trung tuyến đỉnh B, ta có :

$$(d_2): \begin{cases} x = u \\ y = 1 \end{cases}, u \in R \Rightarrow B(u, 1).$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó toạ độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$$

Ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+u+2t-1=3 \\ 3+1+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(5,1) \\ C(-3,-1) \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình các cạnh (AB), (AC), (BC), được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } B(5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): x+2y-7=0.$$

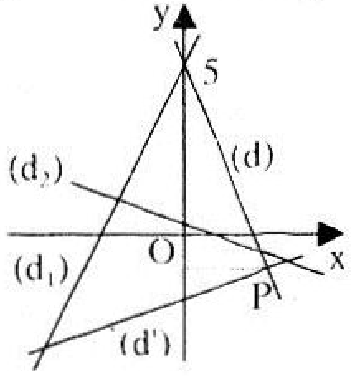
$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): x-y+2=0.$$

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(5,1) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x-4y-1=0.$$

Ví dụ 4: Cho hai đường thẳng:

(d_1): $2x-y+5=0$, (d_2): $3x+6y-1=0$.

Lập phương trình đường thẳng qua điểm P(2, -1) sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).



Giải

Gọi k_1, k_2 theo thứ tự là hsg của (d_1) và (d_2), ta có:

$$k_1=2,\ k_2=-\frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng:

$$k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow (d_1)\perp(d_2).$$

Vậy, gọi (d) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } P(2,-1) \\ \text{hsg } k \end{cases} \Leftrightarrow (d): y=k(x-2)-1 \Leftrightarrow (d): y = kx - 2k - 1 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cùng với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

$$\Leftrightarrow g((d),(d_1))=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{k_1-k}{1+k_1k}\right|=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-3 \\ k'=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Với k=-3, thay vào (1) ta được đường thẳng (d): $y=-3x+5$.
- Với $k=\frac{1}{3}$, thay vào (1) ta được đường thẳng (d'): $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.

Vậy qua P có thể kẻ được hai đường thẳng (d) và (d') thoả mãn đầu bài.

Chú ý. Cũng có thể giải bài toán bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: Tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2)

⇔ đường thẳng (d) qua P vuông góc với đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

- Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), được cho bởi:

$$\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3x+6y-1|}{\sqrt{3^2+6^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta_1): 3x-9y+16=0 \\ (\Delta_2): 9x+3y+14=0 \end{array}\right.$$

- Gọi (d) là đường thẳng qua P(2, −1) và vuông góc với (Δ_1), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } P(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1(9,3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): 9(x-2)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow (d): 3x+y-5=0.$$

- Gọi (d') là đường thẳng qua P(2, -1) và vuông góc với (Δ_2), ta có:

$$(d'): \begin{cases} \text{qua } P(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2(-3,9) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): -3(x-2)+9(y+1)=0 \Leftrightarrow (d'): x-3y-5=0.$$

Cách 2: Thiết lập điều kiện ΔABC cân tại $A=(d_1)\cap(d_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x_B, y_B) \in (d_1) \\ C(x_C, y_C) = (d_2) \\ AB = AC \\ B, C, P \text{ thẳng hàng} \end{cases}.$$

Nhận xét: Thông qua các ví dụ trên chúng ta đã biết cách sử dụng các kết quả quan trọng để lập phương trình đường thẳng, các ví dụ sau đây minh hoạ việc sử dụng chùm đường thẳng và phương pháp quỹ tích.

Ví dụ 5: Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): 2x-y+1=0 \text{ và } (d_2): x-2y-3=0$$

Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) đồng thời chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

Giải

(Δ) đi qua giao điểm (d_1), (d_2) do đó (Δ) thuộc chùm tạo bởi (d_1), (d_2), có dạng:

$$(\Delta): 2x-y+1+m(x-2y-3)=0 \Leftrightarrow (\Delta): (2+m)x-(1+2m)y+1-3m=0. \quad (1)$$

Gọi $A=(\Delta)\cap(Ox)$, khi đó toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(2+m)x-(1+2m)y+1-3m=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow A(\frac{3m+1}{2+m}, 0)$$

Gọi $B=(\Delta)\cap(Oy)$, khi đó toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(2+m)x-(1+2m)y+1-3m=0\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow B(0, -\frac{3m+1}{1+2m}).$$

Đường thẳng (Δ) chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau, suy ra:

$$OA=OB \Leftrightarrow \left|\frac{3m+1}{2+m}\right| = \left|-\frac{3m+1}{1+2m}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=1/3\\ m=-1\end{array}\right.$$

- Với m=1, ta được (Δ_1): $3x-3y-2=0$.
- Với $m=\frac{1}{3}$, ta được (Δ_2): $7x-5y=0$.
- Với m= -1, ta được (Δ_3): $x+y+4=0$.

Vậy có ba đường thẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d): $x-2y+2=0$ qua điểm I(1, 1).

Giải

Với mỗi điểm $M(x, y)\in(d_1) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_0(x_0, y_0)\in(d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases}x+x_0=2\\ y+y_0=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=2-x\\ y_0=2-y\end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$(2-x)-2(2-y)+2=0 \Leftrightarrow x-2y=0$.

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Chú ý: Đòi hỏi trên của bài toán cũng có thể được thực hiện thông qua nhận xét thông thường, cụ thể:

Lấy một điểm $A(0, 1)\in(d)$, gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua I suy ra $A_1(2, 1)$.

- Vì $(d_1)//(d) \Rightarrow$ (d): $x-2y+C=0$.
- Vì $A_1\in(d_1) \Rightarrow C=0$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_1): $x-2y=0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết trung điểm các cạnh là M(2, 1), N(5, 3), P(3, -4).

a. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

b. Lập phương trình các đường trung trực của ΔABC.

Bài tập 2: Cho ΔABC có phương trình cạnh AB là

(AB) : $5x-3y+2=0$,

các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là

(d_1): $4x-3y+1=0$, (d_2): $7x+2y-22=0$.

Lập phương trình hai cạnh AC, BC và đường cao thứ ba.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết B(-4, -5) và hai đường cao có phương trình là:

$$(d_1): 5x+3y-4=0,\ (d_2): 3x+8y+13=0.$$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 4: Cho ΔABC có M(-1, 1) là trung điểm của một cạnh, còn hai cạnh kia có phương trình là:

$$x+y-2=0,\quad 2x+6y+3=0.$$

Hãy xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC.

Bài tập 5: Cho ΔABC có M(-2, 2) là trung điểm của một cạnh, còn hai cạnh kia có phương trình là:

$$x-2y-2=0,\quad 2x+5y+3=0$$

Hãy xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC.

Bài tập 6: Lập phương trình đường thẳng (Δ) trong các trường hợp sau:

a. Đi qua M(5, 1) và tạo thành một góc 45^0 với đường thẳng (d): $y=-2x+4$.

b. Đi qua M(1, 1) và tạo một góc 45^0 với đường thẳng (d): $x-y-2=0$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, biết B(2, -1), đường cao và phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt là

$$(d_1): 3x-4y+27=0 \text{ và } (d_2): x+2y-5=0.$$

Viết phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng

$$(d_1): x+3y-9=0 \text{ và } (d_2): 3x-2y-5=0$$

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) đồng thời

a. Đi qua điểm A(2, 4).

b. Song song với đường thẳng $x-y+4=0$.

c. Vuông góc với đường thẳng $x-y-1=0$.

d. Tạo với đường thẳng (Δ): $x-y-1=0$ một góc bằng 45^0.

e. Chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

Bài tập 9: Cho điểm M(2, 1). Đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A(a, 0), B(0, b) với a, b>0. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA+OB nhỏ nhất.

c. $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: (AC): $2x-7y-5=0$, (BC): $3x+4y-22=0$, (h_c): $3x+5y-23=0$.

Bài tập 3: (AB): $8x-3y+17=0$, (BC): $3x-5y-13=0$, (AC): $5x+2y-1=0$.

Bài tập 4: $A(\frac{15}{4}, -\frac{7}{4})$; $B(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$; $C(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$.

Bài tập 6:

a. Tồn tại hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) thoả mãn là:

$$(\Delta_1): 3x-y-14=0 \ \&\ (\Delta_2): x+3y-8=0.$$

b. Tồn tại hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) thoả mãn là:

$$(\Delta_1): x-1=0 \ \&\ (\Delta_2): y-1=0.$$

Bài tập 7: (AB): $4x+7y-1=0$, (BC): $4x+3y-5=0$, (AC): $y-3=0$.

BÀI TOÁN 3

HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐIỂM LÊN ĐƯỜNG THẲNG

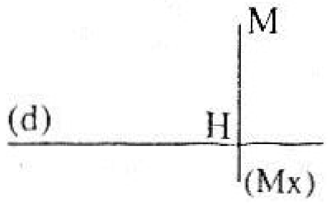
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng (d) .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Lập phương trình (Mx) thoả mãn:

$$(Mx): \begin{cases} \text{qua } M \\ (Mx) \perp (d) \end{cases}.$$

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (d) thì $H=(Mx)\cap(d)$, suy ra toạ độ H là nghiệm của hệ tạo bởi phương trình của (Mx) và (d). Giải hệ ta được toạ độ điểm H.

Cách 2: Giả sử (d) cho dưới dạng tổng quát

(d): $Ax+By+C=0$.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} \,//\, \overrightarrow{n_d}(A,B) \\ H \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x_H - x_M) - A(y_H - y_M) = 0 \\ Ax_H + By_H + C = 0 \end{cases} \qquad (I$$

Bước 2: Giải hệ (I) ta được toạ độ điểm H.

Cách 3: Giả sử (d) cho dưới dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad t \in R.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (d) thì $H \in (d)$, suy ra:

$H(x_0+at,\ y_0+bt) \Rightarrow$ toạ độ $\overrightarrow{MH}$

Bước 2: Vì $MH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a}(a_1, a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ toạ độ H.

Chú ý

1. Nếu điểm $M(x_0, y_0)$, khi đó toạ độ hình chiếu H của M trên
   - Ox có toạ độ $H(x_0, 0)$.
   - Oy có toạ độ $H(0, y_0)$.
2. Nếu điểm $M \notin (d)$, với bài toán:

   " Tìm toạ độ điểm $H \in (d)$ sao cho MH ngắn nhất "

   $\Leftrightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của M lên (d) .

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm M(3, -1) và đường thẳng (d) có phương trình :

(d): $3x-4y+12=0$.

Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của M lên (d), từ đó suy ra toạ độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua (d).

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách ① =②: Gọi (Mx) là đường thẳng thoả mãn :

$$(Mx): \begin{cases} \text{qua } M \\ (Mx) \perp (d) \end{cases},$$

- Vì $(Mx)\perp(d)$ nên

  (Mx): $4x+3y+\underline{D}=0$.

- Vì $M(3, -1)\in(Mx)$ nên

  $4.3-3.1+D=0 \Leftrightarrow D=-9$.

Vậy phương trình đường thẳng (Mx): $4x+3y-9=0$.

- Ta có $H=(Mx)\cap(d)$, suy ra toạ độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y+12=0 \\ 4x+3y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow H(0, 3).$$

- M_1 là điểm đối xứng với M qua (d) $\Rightarrow$ H là trung điểm MM_1, do đó:

$$\begin{cases} x_M + x_{M_1} = 2x_H \\ y_M + y_{M_1} = 2y_H \end{cases} \Rightarrow M_1(-3, 7).$$

Cách ② =④: Giả sử $H(x_H, y_H) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(x_H-3, y_H+1)$.

Vì $H\in(d)$, suy ra

$$3x_H-4y_H+12=0. \qquad (1)$$

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(4, 3)$.

Vì $MH\perp(d)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow 4(x_H-3)+3(y_H+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x_H+3y_H-9=0. \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1) & (2), ta được:

$$\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 3 \end{cases} \Rightarrow H(0, 3).$$

- Toạ độ M_1 tương tự cách 1, ta được $M_1(-3, 7)$.

Cách 3: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 4t \\ y = 3+3t \end{cases}, t\in R.$$

Vì $H \in (d)$, suy ra $H(4t, 3+3t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(4t-3, 3t+4)$.

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được $\vec{a}(4, 3)$.

Vì $MH \perp (d)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 4(4t-3)+3(3t+4)=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow H(0, 3).$$

- Toạ độ M_1 tương tự cách 1, ta được $M_1(-3, 7)$.

Chú ý:

1. Như vậy bằng việc xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của M lên (d) ta đã xác định được toạ độ điểm M_1 đối xứng với M qua (d), tuy nhiên nếu bài toán chỉ đòi hỏi xác định toạ độ M_1 thì ngoài ba cách đã biết ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \,//\, \overrightarrow{n_d}(A, B) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x_{M_1} - x_M) - A(y_{M_1} - y_M) = 0 \\ A\left(\dfrac{x_{M_1} + x_M}{2}\right) + B\left(\dfrac{y_{M_1} + y_M}{2}\right) + C = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 2: Giải hệ (I) ta được toạ độ điểm M_1.

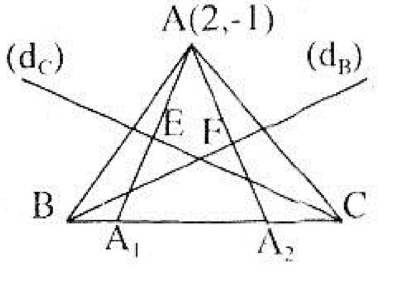
2. Thông qua việc xác định toạ độ điểm đối xứng ta có thể thực hiện được một vài đòi hỏi đặc biệt của bài toán, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho ΔABC biết A(2, -1) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình

$$(d_B): x-2y+1=0 \text{ và } (d_C): x+y+3=0.$$

Lập phương trình cạnh BC.

Giải



Nhận xét rằng nếu lấy A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A qua (d_C) và (d_B) thì $A_1, A_2 \in BC$.

Vậy, phương trình đường thẳng (A_1A_2) cũng chính là phương trình đường thẳng (BC). Ta lần lượt đi xác định A_1, A_2:

a. *Xác định A_1.*

Gọi (d_1) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (d_B) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } A(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x+y-3=0.$$

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên (d_C) suy ra $E=(d_1) \cap (d_B)$ và toạ độ điểm E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1, 1).$$

Vì E là trung điểm AA_1, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_1} = 2x_E - x_A = 0 \\ y_{A_1} = 2y_E - y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A_1(0, 3).$$

b. *Xác định A_2.*

Gọi (d_2) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \perp (d_C) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} \text{qua } A(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_C(1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): x - y - 3=0.$$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên (d_B) suy ra $F=(d_2)\cap(d_C)$ và toạ độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(0, -3).$$

Vì F là trung điểm AA_2, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_2} = 2x_F - x_A = 0 \\ y_{A2} = 2y_F - y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A_2(-2, -5).$$

Vậy, phương trình (BC) được xác định bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } A_1(0,3) \\ \text{qua } A_2(-2,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): 4x-y+3=0.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên bằng việc xác định toạ độ hai điểm A_1, A_2 đối xứng với A theo thứ tự qua (d_C) và (d_B) ta lập được phương trình cạnh BC và

a. Từ kết quả này chúng ta dễ dàng lập được phương trình hai cạnh còn lại của ΔABC là AB và AC.

b. BC chính là đường thẳng đối xứng với AC qua (d_C), do vậy đề nghị bạn đọc trình bày phương pháp tổng quát để "*xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ)*".

Ví dụ 3: Cho ΔABC biết phương trình cạnh

$$(BC): 4x-y+3=0$$

và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình

$$(d_B): x-2y+1=0 \text{ và } (d_C): x+y+3=0.$$

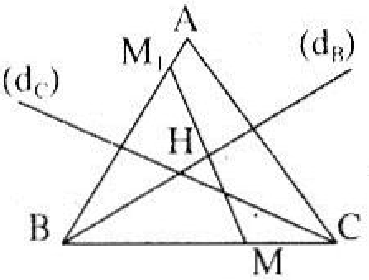
Lập phương trình cạnh AB, AC.

Giải

- Cạnh AB đối xứng với BC qua (d_B), ta lần lượt thực hiện :

  Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B(-\frac{5}{7}, \frac{1}{7}).$$



Lấy một điểm $M(0, 3) \in (BC)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (d_B), ta có:

Gọi (d_M) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_M): \begin{cases} \text{qua } M \\ (d_M) \perp (d_B) \end{cases} \Leftrightarrow (d_M): \begin{cases} \text{qua } M(0,3) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x+y-3=0.$$

Vì $(d_M) \cap (d_B) = \{H\}$, toạ độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1, 1).$$

Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua $(d_B) \Rightarrow$ H là trung điểm $MM_1 \Rightarrow M_1(2, -1)$.

Phương trình cạnh (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B(-\frac{5}{7}, \frac{1}{7}) \\ \text{qua } M_1(2,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-2}{-\frac{5}{7}-2} = \frac{y+1}{\frac{1}{7}+1} \Leftrightarrow (AB): 8x+21y+5=0.$$

- Cạnh AC đối xứng với BC qua (d_C) - *Đề nghị bạn đọc tự giải theo cách tương tự*

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho điểm M(7, 4) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): 3x+4y-12=0.$$

Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của M lên (d), từ đó suy ra toạ độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua (d).

Bài tập 2: Cho ΔABC biết A(1, 3), B(5, 1), C(-3, -1).

a. Tìm toạ độ điểm H là trực tâm ΔABC.

b. Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

Bài tập 3: Cho ΔABC biết A(4, -1) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình

$$(d_B): 2x - 3y + 12 = 0,\ (d_C): 2x + 3y = 0.$$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 4: Cho ΔABC biết A(3, 5), B(4, −3) và phân giác trong của góc C có phương trình

$$(d_C): x + 2y - 8 = 0.$$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 5: Cho ΔABC biết phương trình cạnh BC là

$$(BC): 9x + 11y + 5 = 0$$

và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình

$$(d_B): 2x - 3y + 12 = 0 \text{ và } (d_C): 2x + 3y = 0.$$

Lập phương trình cạnh AB, AC.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: H(4, 0) và $M_1(1, -4)$.

Bài tập 2: $H(\frac{13}{3}, -\frac{31}{3})$ và $K(-\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$.

BÀI TOÁN 4

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nếu hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình tổng quát

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$(d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

ta sử dụng kết quả:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1)//(d_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1)\equiv(d_2)$.

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2).

Các trường hợp khác thì bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), khi đó số nghiệm của hệ phương trình cho phép kết luận về vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng có phương trình tổng quát sẽ gợi ý cho chúng ta giải bài toán:

" *Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F=(A_1x+B_1y+C_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2)^2."$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hai đường thẳng

$$(d_1): A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ và } (d_2): A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Bước 2: Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2). Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Xác định các giá trị của D, D_x, D_y.

Bước 3: Biện luận:

a. Nếu $D \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $x=\frac{D_x}{D}$ và $y=\frac{D_y}{D}$.

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó minF=0, đạt được khi

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ và } y=\frac{D_y}{D}.$$

b. Nếu $D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Khi đó $(d_1)\equiv(d_2)$ do đó minF=0, đạt được tại $\forall M(x, y)\in(d_1)$.

c. Nếu

$$\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Khi đó thì $(d_1) // (d_2)$ do đó đặt $t=A_1x+B_1y+C_1$, ta được:

$$F = t^2 + (kt + m)^2 = (k^2 + 1)t^2 + 2mkt + m^2 \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Vậy $\min F = -\frac{\Delta}{4a}$, đạt được khi $t = -\frac{mk}{k^2 + 1}$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng:

(d_1): $kx - y + k = 0$,

(d_2): $(1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$.

a. CMR khi k thay đổi (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của k, hãy xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

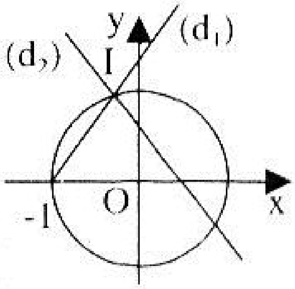
c. Tìm quĩ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

Giải

a. Gọi M(x, y) là điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua với $\forall k$

$\Leftrightarrow$ pt $kx-y+k=0\ \forall k \Leftrightarrow$ pt $(x+1)k-y=0\ \forall k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 0).$



Vậy (d_1) luôn đi qua điểm cố định M(-1, 0).

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{cases} kx - y = -k \\ (1 - k^2)x + 2ky = 1 + k^2 \end{cases}$$

Ta có:

$D=1+k^2$, $D_x=1-k^2$, $D_y=2k$.

Vì $D\neq 0\ \forall k \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) luôn cắt nhau tại $I(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2})$.

c. Tìm quĩ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{1-k^2}{1+k^2} \\ y = \frac{2k}{1+k^2} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1.$$

Vậy, quĩ tích của giao điểm I của (d_1) và (d_2) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$;

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -2t_1 \\ y = -3t_1 \end{cases}, t_1 \in R \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t_2 \\ y = 3 + 6t_2 \end{cases}, t_2 \in R.$$

a. Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b. Tính cosin góc nhọn tạo bởi (d_1) và (d_2).

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} -2t_1 = 1 + 3t_2 \\ -3t_1 = 3 + 6t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy (d_1) cắt (d_2) tại $A(-2, -3)$.

b. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có $\vec{a}_1(-2, -3)$, $\vec{a}_2(1, 2)$.

Khi đó, cosin góc nhọn α tạo bởi (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|-2.1 - 3.2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}.\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{65}}.$$

Ví dụ 3: Hãy biện luận theo a giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2.$$

Giải

Xét hai đường thẳng

(d_1): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_2): $2x + ay + 5 = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + ay = -5 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = a + 4,\ D_x = -a - 10,\ D_y = -3.$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a + 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4$.

Hệ có nghiệm $x = -\frac{a+10}{a+4}$ và $y = -\frac{3}{a+4}$ $\Rightarrow (d_1)$ cắt (d_2) do đó $\min F = 0$.

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

Với $a = -4$, suy ra $D_x = -6 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Khi đó (d_1) song song (d_2) do đó

$$F = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2.$$

Đặt $t = x - 2y + 1$, ta được

$$F = t^2 + 4(t + \frac{3}{2})^2 = 5t^2 + 12t + 9 \geq \frac{9}{5}.$$

Vậy $\min F = \frac{9}{5}$, đạt được khi

$$t = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x - 2y + 1 = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5x - 10y - 11 = 0.$$

Kết luận:

- Với $a \neq -4$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = -\dfrac{a+10}{a+4}$ và $y = -\dfrac{3}{a+4}$.
- Với $a = -4$, $\min F = \dfrac{9}{5}$, đạt được khi x, y thoả mãn $5x - 10y - 11 = 0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. (d_1): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ $t \in R$; (d_2): $\begin{cases} x = 2 + u \\ y = -u \end{cases}$, $u \in R$.

b. (d_1): $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$, $t \in R$; (d_2): $x + y - 7 = 0$.

c. (d_1): $x + 2y + 1 = 0$; (d_2): $x + 4y + 3 = 0$.

d. (d_1): $mx + y + 2 = 0$; (d_2): $x + my + m + 1 = 0$.

Bài tập 2: Cho $a^2 + b^2 > 0$ và 2 đường thẳng:

(d_1): $(a - b)x + y = 1$ và (d_2): $(a^2 - b^2)x + ay = b$.

a. Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b. Tìm điều kiện với a, b để giao điểm đó thuộc trục hoành.

Bài tập 3: Cho hai đường thẳng

(d_1): $x - ky - k = 0$ và (d_2): $2kx - (k^2 - 1)y - (k^2 + 1) = 0$

a. Với mỗi giá trị của k hãy xác định giao điểm I của (d_1) và (d_2).

b. Tìm quỹ tích của I khi k thay đổi.

Bài tập 4: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $\begin{cases} x = x_1 + mt_1 \\ y = y_1 + nt_1 \end{cases}$ và (d_2): $\begin{cases} x = x_2 + pt_2 \\ y = y_2 + qt_2 \end{cases}$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$,

biết x_1, y_1, x_2, y_2 là bốn số cố định.

Tìm điều kiện cần và đủ (viết theo m, n, p, q) để (d_1) và (d_2):

a. Cắt nhau.

b. Song song với nhau.

c. Trùng nhau.

d. Vuông góc với nhau.

Bài tập 5: Hãy biện luận theo a giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a. $F = (x + y - 2)^2 + (x + ay - 3)^2$.

b. $F = (2x + y - 2)^2 + (4x + ay - 1)^2$.

c. $F = (x + ay - 2)^2 + [4x + 2(a - 2)y - 1]^2$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. $(d_1) \cap (d_2) = I(-\dfrac{1}{b}, \dfrac{a}{b})$.

b. Điểm $I \in Ox$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - ab \neq 0 \\ \dfrac{a}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

BÀI TOÁN 5

ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tận dụng phương trình đường thẳng (d) cho trước.

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tham số :

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}, t \in R.$$

Bước 1: Lấy điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0+a_1t, y_0+a_2t)$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K xác định t.

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tổng quát:

$$(d): Ax+By+C=0, \text{ với } A^2+B^2>0.$$

Bước 1: Lấy điểm $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$Ax_M+By_M+C=0.$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K thiết lập thêm một phương trình cho x_M và y_M. Từ đó tìm được toạ độ của M.

Lưu ý: Khi đó cũng có thể chuyển phương trình (d) về dạng tham số để sử dụng cách 1.

Hướng 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): x-2y+15=0.$$

Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Giải

Cách 1: Vì $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$x_M-2y_M+15=0 \Leftrightarrow x_M=2y_M-15,$$

khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 =(2y_M-15)+ y_M^2 =5 y_M^2 -60y_M+225=5(y_M-6)^2+45\ge 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min}=45$ đạt được khi:

$$y_M=6 \Rightarrow M(-3, 6).$$

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 15 \\ y = t \end{cases}, t \in R.$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(2t-15, t)$. Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2t-15)^2 + t^2 = 5t^2 - 60t + 225 = 5(t-6)^2 + 45 \geq 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$t = 6 \Rightarrow M(-3, 6)$.

Ví dụ 2: Cho hai điểm $A(0, 2)$, $B(2, -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): x - y - 1 = 0.$$

Tìm điểm M trên (d) sao cho MA+MB nhỏ nhất.

Giải

Ta có nhận xét:

$$t_A.t_B = (-2 - 1)(2 + 2 - 1) = -9 < 0 \Rightarrow \text{A, B khác phía với (d)}$$

Ta luôn có:

$$MA + MB \geq AB$$

do đó $(MA + MB)_{Min} = AB$ đạt được khi A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \{M\} = (d) \cap (AB)$.

- Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0, 2) \\ \text{qua } B(2, -2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2-2} \Leftrightarrow (AB): 2x + y - 2 = 0$$

- Toạ độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1, 0).$$

Vậy tại điểm M(1, 0) ta được MA+MB nhỏ nhất.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp giải một trường hợp của một dạng toán cơ bản về điểm thuộc đường thẳng là:

" Tìm trên đường thẳng (d) điểm M sao cho MA+MB nhỏ nhất, với các điểm A và B cho trước và không thuộc (d). "

Để giải dạng toán này ta thực hiện như sau:

Xác định

$$t_A.t_B = (Ax_A + By_A + C)(Ax_B + By_B + C).$$

Có một trong hai khả năng xảy ra:

Khả năng 1: Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A, B ngược phía với (d).

Ta thực hiện như trong ví dụ trên.

Khả năng 2: Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng phía với (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d).

Bước 2: Ta có:

$$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B$$

do đó $(MA + MB)_{Min} = A_1B$ đạt được khi A_1, B, M thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \{M\} = (d) \cap (A_1B).$$

Bước 3: Xác định toạ độ A_1.

Bước 4: Lập phương trình (A_1B), từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Tuy nhiên phương pháp trên mắc phải một số nhược điểm sau:

a. Nếu phương trình của (d) được cho dưới dạng tham số thì ta buộc phải chuyển về dạng tổng quát để có thể kiểm tra được A và B nằm về một phía hay hai phía đối với (d).

b. Việc xác định toạ độ các điểm A_1 khá phức tạp. Để khắc phục tình trạng trên, chúng ta lựa chọn phương pháp được minh hoạ trong ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho hai điểm A(1, 2) và B(0, -1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}.$$

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho:

a. MA + MB nhỏ nhất.

b. |MA – MB| lớn nhất.

Giải

a. Vì $M \in (d)$ nên $M(t, 2t+1)$. Khi đó ta có:

$$MA+MB=\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2}+\sqrt{t^2+(2t+2)^2}$$

$$=\sqrt{5t^2-6t+2}+\sqrt{5t^2+8t+4}$$

$$=\sqrt{5}\,[\sqrt{\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}+\sqrt{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{25}}\,]$$

Xét các điểm $A_1(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$; $B_1(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ và $M_1(t, 0)$.

Khi đó:

$$MA+MB=\sqrt{5}\,(M_1A_1+M_1B_1).$$

Vì M_1 chạy trên trục hoành và A_1, B_1 nằm về hai phía của Ox nên

$$(MA+MB)_{min} \Leftrightarrow (M_1A_1+M_1B_1)_{min} \Leftrightarrow M_1=(A_1B_1)\cap Ox$$

$$\Leftrightarrow M_1(\frac{2}{15}, 0) \Leftrightarrow M(\frac{2}{15}, \frac{19}{15})$$

b. Tương tự câu a) ta có:

$$|MA-MB|=\sqrt{5}\,|\sqrt{\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}-\sqrt{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{25}}\,|$$

Xét các điểm $A_2(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$; $B_2(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ và $M_2(t, 0)$.

Khi đó:

$$|MA-MB|=\sqrt{5}\,|M_2A_2-M_2B_2|.$$

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$$|MA-MB|_{max} \Leftrightarrow |M_2A_2-M_2B_2|_{max} \Leftrightarrow M_2=(A_2B_2)\cap Ox \Leftrightarrow M_2(2, 0) \Leftrightarrow M(2, 5).$$

Nhận xét: Lấy ý tưởng từ phương pháp trên ta có thể sử dụng để tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức chứa căn bậc hai - *Đề nghị bạn đọc áp dụng nó trong phần bài tập đề nghị.*

Ví dụ 4: Cho ΔABC cân tại A, biết phương trình cạnh AB có dạng :

$$(AB):\ 3\sqrt{7}\,x - y - 3\sqrt{7} = 0,$$

điểm B, C thuộc trục hoành và A thuộc góc phần tư thứ nhất.

a. Xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC, biết rằng $p=9$.

b. Tìm toạ độ điểm $M \in AB$ và $N \in BC$ sao cho đường thẳng MN đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC.

Giải

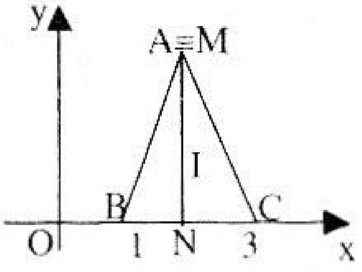
a. Ta có toạ độ các điểm $A(a,\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, $B(1,\ 0)$, $C(2a-1,\ 0)$,

Từ giả thiết:

- $A \in P(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1.$

- $p=9 \Leftrightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 9$

$\Leftrightarrow 2.8|a-1| + 2|a-1| = 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 0\ (l) \end{array}\right.$



Từ đó $A(2,\ 3\sqrt{7})$, $B(1,\ 0)$, $C(3,\ 0)$.

b. Ta cần tìm điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x=BM$, $0 \leq x \leq 8$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$$BN = p - x = 9 - x,\ 0 \leq 9 - x \leq 2 \Leftrightarrow 7 \leq x \leq 9,$$

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(9-x)}{8.2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 1\ (l) \end{array}\right..$$

- Với $x=8 \Rightarrow M \equiv A(2,\ 3\sqrt{7})$ & $N(2,\ 0)$ là trung điểm BC.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp giải của một dạng toán cơ bản là:

" *Lập phương trình đường thẳng (d) đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC.* "

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biết $A(2,\ -3)$, $B(3,\ -2)$, có diện tích $S=\dfrac{3}{2}$ và trọng tâm của tam giác thuộc đường thẳng (d): $3x-y-8=0$. Tìm toạ độ đỉnh C.

Giải

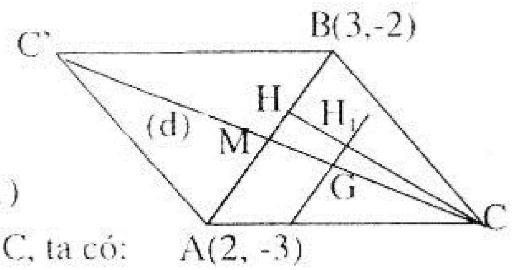
Phân tích: Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm ΔABC.

Khi đó

$$\overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_G = 2(x_G - x_M) \\ y_C - y_G = 2(y_G - y_M) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2(x_G - x_M) + x_G \\ y_C = 2(y_G - y_M) + y_G \end{cases} \qquad (I)$$

Vậy để xác định toạ độ C, ta đi xác định toạ độ M, G.



- Toạ độ điểm M được cho bởi:

$$\begin{cases} 2x_M = x_A + x_B \\ 2y_M = y_A + y_B \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

- Điểm $G(x, y) \in (d) \Rightarrow 3x - y - 8 = 0$ (1)

Gọi CH là đường cao của ΔABC hạ từ C, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.CH = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow CH = \frac{3}{\sqrt{(3-2)^2 + (-2+3)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Qua G dựng đường thẳng song song với AB cắt CH tại H_1, khi đó:

$$\frac{HH_1}{CH} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow HH_1 = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phương trình (AB) được cho bởi

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(2,-3) \\ \text{qua } B(3,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3}$$

$\Leftrightarrow (AB): x - y - 5 = 0.$

Nhận xét rằng:

$$d(G, (AB)) = HH_1 \Leftrightarrow \frac{|x-y-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |x-y-5| = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ |x - y - 5| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - y - 5 = 1 \\ x - y - 5 = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = -5 \\ x = 2 \ \& \ y = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} G(1,-5) \\ G(2,-2) \end{array}\right.$$

- Với G(1, -5) thay vào (I), ta được C(-2, -10).
- Với G(2, -2) thay vào (I), ta được C(1, -1).

Vậy có hai điểm C thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Cho ΔOAB vuông tại O. Điểm A di động trên đường thẳng (d_1): $x=2$, B di động trên đường thẳng (d_2): $y=1$. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O lên AB.

Giải

Giả sử $A(2, y_A)$, $B(x_B, 1)$ và hình chiếu vuông góc H của O lên AB là $H(x, y)$, khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HO} \\ \overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{HO} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HO} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HO} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_B + y_A = 0 \\ x(x-2) + y(y - y_A) = 0 \\ x(x - x_B) + y(y-1) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Khử y_A, x_B từ hệ (I), ta được:

$x+2y-2=0$.

Vậy tập hợp hình chiếu vuông góc H của O lên AB thuộc đường thẳng (d): $x+2y-2=0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x+2y-3=0$.

Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2+y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài tập 2: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $3x-2y-1=0$.

Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2+y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài tập 3: Cho hai điểm A(-1, 3), B(1, 1) và đường thẳng (d) có phương trình

(d): $y=2x$.

Xác định điểm C trên (d) sao cho:

a. ΔABC là một tam giác đều.

b. ΔABC là một tam giác cân.

Bài tập 4: Cho điểm A(1, 1). Hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y=3$ và điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC đều.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A, biết điểm A, B thuộc trục hoành, phương trình cạnh BC là :

(BC): $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}=0$.

Xác định toạ độ trọng tâm G của ΔABC, biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2.

Bài tập 6: Cho P(3, 0) và hai đường thẳng

(d_1): $2x-y-2=0$, (d_2): $x+y+3=0$.

Gọi (d) là đường thẳng qua P cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A, B. Lập phương trình của (d) biết PA=PB.

Bài tập 7: Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}, t\in R.$$

a. Tìm điểm M thuộc (d) sao cho $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ nhỏ nhất.

b. Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với (d) sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ A_i, $i=\overline{1,n}$ tới (d_1) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 8: Cho hai điểm A(1, 2), B(2, 5) và đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x-2y-2=0$.

Tìm trên đường thẳng (d) điểm M sao cho:

a. MA+MB nhỏ nhất.

b. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

c. |MA-MB| nhỏ nhất.

d. |MA-MB| lớn nhất.

Bài tập 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+\sqrt{x^2-2bx+2b^2}\text{ , với } a<0 \text{ và } b>0.$$

Bài tập 10: Cho điểm $M(1, 1-\cos\alpha)$ và $N(3, 4)$. Tính OM, MN, từ đó tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+2}+\sqrt{\cos^2\alpha+6\cos\alpha+13}\ .$$

Bài tập 11: Cho ΔABC vuông tại C, với AC=3 và BC=4. Điểm A di động trên Ox, B di động trên Oy. Tìm tập hợp các đỉnh C.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $(x_M^2+y_M^2)_{Min}=\frac{9}{5}$ đạt được tại $M(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$.

Bài tập 2: $(x_M^2+y_M^2)_{Min}=\frac{1}{13}$ đạt được tại $M(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$.

Bài tập 3:

a. Vô nghiệm.

b. Tồn tại 5 điểm C.

Bài tập 4: Tồn tại hai cặp điểm B, C để ΔABC đều.

Bài tập 5: Tồn tại hai trọng tâm G (của 2 ΔABC) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 6:

- Giả sử $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$, khi đó:

  Điểm $A\in(d_1) \Leftrightarrow 2x_A-y_A-2=0$ (1)

  Điểm $B\in(d_2) \Leftrightarrow x_B+y_B+3=0$ (2)

  $PA=PB \Leftrightarrow$ P là trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=2x_P \\ y_A+y_B=2y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=6 & (3) \\ y_A+y_B=0 & (4) \end{cases}$$

  Giải hệ tạo bởi (1), (2), (3) và (4), được $A(\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$ và $B(\frac{7}{3}, -\frac{16}{3})$.

- Phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

  (d): $8x-y-24=0$.

Bài tập 10: Giả sử $A(x_A, 0)$, $B(0, y_B)$ và $C(x, y)$, khi đó:

$$\begin{cases} AC=3 \\ BC=4 \\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2=9 \\ BC^2=16 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_A)^2+y^2=9 \\ x^2+(y-y_B)^2=16 \\ x(x-x_A)+y(y-y_B)=0 \end{cases} \quad (I)$$

Khử x_A, y_B từ hệ (I), ta được:

$$\begin{cases} |x|\le 4 \\ 9x^2-16y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 4 \\ 3x\pm 4y=0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các đỉnh C thuộc hai đoạn thẳng có hoành độ thoả mãn $|x|\le 4$ trên hai đường thẳng (d_1): $3x-4y=0$ và (d_2): $3x+4y=0$.

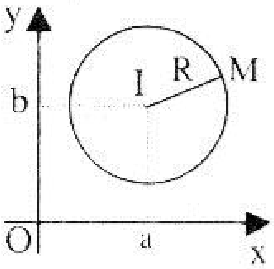
CHỦ ĐỀ 4

ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) có tâm I(a, b) và bán kính R có phương trình

$$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$



Chú ý: Ta có:

- Đường tròn tâm O bán kính R có phương trình $x^2+y^2=R^2$.
- Đường tròn đơn vị có phương trình $x^2+y^2=1$.

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Trong mặt phẳng Oxy, đường cong (C) có phương trình

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \text{ với } a^2+b^2-c\geq 0 \qquad (2)$$

là phương trình của đường tròn tâm I(a, b) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn (C) có phương trình chính tắc:

$$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

được chuyển về dạng tham số:

$$(C): \left(\frac{x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y-b}{R}\right)^2=1 \Leftrightarrow (C): \begin{cases}\dfrac{x-a}{R}=\sin t\\ \dfrac{y-b}{R}=\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (C): \begin{cases}x=a+R\sin t\\ y=b+R\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi). \qquad (3)$$

Phương trình (3) được gọi là *phương trình tham số dạng lượng giác* của đường tròn (C).

4. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Trong mặt phẳng Oxy, phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(x_0, y_0)$ của đường tròn (C):

$$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

có phương trình:

$$(d): (x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2. \qquad (4)$$

Chú ý:

1. Phương trình (4) được gọi là *phương trình phân đôi toạ độ* theo quy tắc
   $(x-a)^2=(x-a).(x-a)$ thay bằng $(x-a).(x_0-a)$.
   $(y-b)^2=(y-b)(y-b)$ thay bằng $(y-b)(y_0-b)$.

2. Nếu (C) có phương trình tổng quát:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \text{ với } a^2+b^2-c \geq 0$$

thì tiếp tuyến (d) có phương trình:

$$(d): x.x_0+y.y_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

dựa theo quy tắc:

$x^2=x.x$ thay bằng $x.x_0$.

$y^2=y.y$ thay bằng $y.y_0$.

$2ax=a(x+x)$ thay bằng $a(x+x_0)$.

$2by=b(y+y)$ thay bằng $b(y+y_0)$.

3. Trong trường hợp tổng quát, đường thẳng (d) tiếp xúc (là tiếp tuyến) với đường tròn (C) có tâm I và bán kính R khi và chỉ khi:

$$d(I, (d))=R.$$

5. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \text{ với } a^2+b^2-c \geq 0.$$

Phương tích của điểm $M(x_0, y_0)$ đối với đường tròn (C) được xác định bởi:

$$\mathscr{P}_{M/(C)}= x_0^2 + y_0^2 -2ax_0-2by_0+c$$

Từ giá trị về dấu của $\mathscr{P}_{M/(C)}$ ta xác định được vị trí của điểm M đối với (C)

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}>0 \Leftrightarrow$ M ở ngoài đường tròn (C).
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}=0 \Leftrightarrow$ M ở trên đường tròn (C).
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}<0 \Leftrightarrow$ M ở trong đường tròn (C).

6. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho hai đường tròn không đồng tâm (C_1) và (C_2) có phương trình :

$$(C_1): x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0, \text{ với } a_1^2+b_1^2-c_1 \geq 0$$

$$(C_2): x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0, \text{ với } a_2^2+b_2^2-c_2 \geq 0$$

Khi đó tập hợp những điểm có cùng phương tích với hai đường tròn (C_1) và (C_2) là đường thẳng (d), gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình:

$$(d): 2(a_1- a_2)x+2(b_1- b_2)y-c_1+c_2=0.$$

BÀI TOÁN 1

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định phương trình là phương trình đường tròn

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \qquad (1)$$

Bước 2: Để (1) là phương trình đường tròn thì điều kiện là:

$$a^2+b^2-c\geq 0.$$

Bước 3: Khi đó (C) có thuộc tính:

$$\begin{cases}\text{Tam } I(a,b)\\ \text{Bán kính } R=\sqrt{a^2+b^2-c}\end{cases}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho họ đường cong:

$$(C_m): x^2+y^2-(m+6)x-2(m-1)y+m+10=0. \qquad (1)$$

a. Tìm m để (C_m) là một họ đường tròn. Tìm quĩ tích tâm I_m.

b. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (C_m).

c. Chứng minh rằng các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

Giải

a. Ta có:

$$a^2+b^2-c=\frac{(m+6)^2}{4}+(m-1)^2-m-10=\frac{5m^2}{4}\geq 0,\ \forall m.$$

Vậy, với mọi giá trị của m phương trình (1) là phương trình của một đường tròn, có tâm $I_m(\frac{m+6}{2}, m-1)$ và bán kính $R=\frac{m\sqrt{5}}{2}$.

Quĩ tích tâm I_m:

$$I_m:\begin{cases}x=\dfrac{m+6}{2}\\ y=m-1\end{cases}\Rightarrow 2x-y-7=0.$$

Vậy, tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $2x-y-7=0$.

b. Giả sử M(x, y) thuộc trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (C_m)

$$\Leftrightarrow P_{M/(C_{m_1})}=P_{M/(C_{m_2})},\ \forall m_1, m_2 \text{ và } m_1\neq m_2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-(m_1+6)x-2(m_1-1)y+m_1+10=x^2+y^2-(m_2+6)x-2(m_2-1)y+m_2+10$$

$$\Leftrightarrow (m_1-m_2)(x-1)+(2m_1-2m_2)(y-1)-(m_1-m_2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+2(y-1)-1=0 \Leftrightarrow x+2y-4=0.$$

Vậy, đường thẳng $x+2y-4=0$ là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn của họ (C_m).

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Với m_1 và m_2 bất kỳ ($m_1 \neq m_2$), xét hệ phương trình tạo bởi (C_{m_1}), (C_{m_2}):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (m_1 + 6)x - 2(m_1 - 1)y + m_1 + 10 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - (m_2 + 6)x - 2(m_2 - 1)y + m_2 + 10 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow x=1-2y$, thay vào (1), ta được:

$$y^2+2y+1= 0. \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm kép $y_0=-1\ \forall m$.

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(3, -1).

Cách 2: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-(m+6)x-2(m-1)y+m+10= 0\ ,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(-x-2y+1)+x^2+y^2-6x+2y+10 = 0\ ,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(3, -1).$$

Nhận xét rằng tâm I_m của họ (C_m) luôn thuộc đường thẳng (d) cố định đi qua điểm M cố định.

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(3, -1).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của đường tròn, chỉ rõ tâm và bán kính của nó

a. $x^2+y^2-2x-2y-2 = 0$.

b. $-x^2-y^2-2x-2y+7 = 0$.

c. $x^2+y^2-2x-4y+9 = 0$.

d. $2x^2+y^2-2x-2y-2=0$

Bài tập 2: Cho họ đường cong:

$$(C_m):\ x^2+y^2-2(m+2)x-2(m+4)y+4m+2= 0.$$

a. CMR với mọi m luôn có (C_m) là phương trình của một đường tròn.

b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

c. Tìm đường tròn có bán kính nhỏ nhất trong họ (C_m).

d. Tìm các điểm cố định mà mọi đường tròn của họ (C_m) đều đi qua.

e. Tìm các điểm trong mặt phẳng Oxy mà mọi đường tròn của họ (C_m) không thể đi qua.

Bài tập 3: Cho họ đường cong:

$$(C_m):\ x^2+y^2-2mx-2(m+1)y+2m-1= 0.$$

a. CMR với mọi m luôn có (C_m) là phương trình của một đường tròn.

b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

c. Tìm đường tròn có bán kính nhỏ nhất trong họ (C_m).

d. Tìm các điểm cố định mà mọi đường tròn của họ (C_m) đều đi qua.

e. CMR (C_m) luôn cắt Oy tại 2 điểm phân biệt.

f. Tìm các điểm trong mặt phẳng Oxy mà mọi đường tròn của họ (C_m) không thể đi qua.

Bài tập 4: Cho họ đường cong:

(C_m): $x^2+y^2-2m(x-1)=0$.

a. Tìm m để phương trình trên là phương trình của đường tròn ?
b. Cho A(2, 0). CMR đường thẳng (OA) luôn cắt (C_m).
c. CMR tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (C_m).

Bài tập 5: Cho họ đường cong:

$$(C_m): x^2+y^2-2mx+2(m+2)y+2m^2+4m-\frac{1}{2}=0.$$

a. CMR (C_m) luôn là một đường tròn có bán kính không đổi.
b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m), từ đó suy ra rằng (C_m) luôn tiếp xúc với hai trong ba đường thẳng cố định.

Bài tập 6: Cho họ đường cong có phương trình:

(C_m): $x^2+y^2-2x-4my+4m=0$.

a. Tìm m để (C_m) là một họ đường tròn.
b. CMR các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: a) và b) là phương trình đường tròn.
c) và d) không là phương trình đường tròn.

Bài tập 2:

b. Tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $x-y+2=0$.
c. Trong họ (C_m) đường tròn (C_{-2}) có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}$.
d. (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $M_1(\sqrt{5}, 2-\sqrt{5})$ và $M_2(-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$
e. Giả sử M(x, y) là điểm mà (C_m) không thể đi qua, ta được:

$x^2+y^2-2(m+2)x-2(m+4)y+4m+2=0$, vô nghiệm theo m

$\Leftrightarrow (4-2x-2y)m+x^2+y^2-4x-8y+2=0$, vô nghiệm theo m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x_0-2y_0=0 \\ x_0^2+y_0^2-4x_0-8y_0+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x\neq \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy, các điểm trong mặt phẳng Oxy mà mọi đường tròn của họ (C_m) không thể đi qua nằm trên đường thẳng (Δ): $x+y-2=0$ bỏ đi hai điểm M_1, M_2.

Bài tập 3:

a. Với $\forall$m phương trình đã cho là phương trình của một đường tròn, có tâm $I_m(m, m+1)$ và bán kính $R=\sqrt{2m^2+2}$.
b. Tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $x-y+1=0$.
c. Ta có $R^2=2m^2+2\geq 2 \Rightarrow R_{min}=\sqrt{2}$, đạt được khi m=0

Vậy trong họ (C_m) đường tròn (C_0) có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$.

d. Các đường tròn của họ (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định M_1, M_2.
e. Chúng ta đã được biết khái niệm phương tích của một điểm đối với đường tròn, khi đó chọn điểm $C(0, 1)\in Oy$ và

$\mathscr{P}_{C/(C)}=1-2(m+1)+2m-1=-2<0 \Leftrightarrow$ C ở trong đường tròn (C)

Vậy (C_m) luôn cắt Oy tại 2 điểm phân biệt.

BÀI TOÁN 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Lập phương trình đường tròn thoả mãn điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi (C) là đường tròn thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

- Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c, điều kiện $a^2+b^2-c \geq 0$.
- Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, R, điều kiện $R \geq 0$.

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình đường tròn.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

a. Đi qua điểm C(1, 2) và tâm là giao điểm của hai đường thẳng

(d_1): $3x-4y+1=0$ và (d_2): $2x+y-3=0$

b. Đi qua điểm A(1, 2), B(3, 1) và tâm I nằm trên (d): $7x+3y+1=0$.

Giải

a. Gọi K là giao điểm của (d_1) và (d_2), khi đó toạ độ của K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y+1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \Rightarrow K(1, 1)$$

Đường tròn (C) có tâm K có phương trình:

(C): $(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$.

Điểm $C(1, 2) \in (C) \Leftrightarrow 1=R^2$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

b. Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng:

(C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với điều kiện $a^2+b^2-c \geq 0$.

Điểm $A(1, 2) \in (C) \Leftrightarrow 5-2a-4b+c=0$. (1)

Điểm $B(3, 1) \in (C) \Leftrightarrow 10-6a-2b+c=0$. (2)

Tâm $I(a, b) \in (d) \Leftrightarrow 7a+3b+1=0$ (3)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), ta được

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=-10$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-x+3y-10=0$.

Chú ý: Để lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C (đường tròn ngoại tiếp ΔABC) ta cân nhắc lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tổng quát, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường tròn (C) có phương trình:

$$(C):\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\ \text{với } a^2+b^2-c \geq 0. \qquad (1)$$

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thuộc (C), ta được hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c.

Thay a, b, c vào (1) ta được phương trình của (C).

Hướng 2: Dựa trên dạng đặc biệt của ΔABC, tức là:

1. Nếu ΔABC vuông tại A, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I là trung diểm BC} \\ R = \dfrac{BC}{2} \end{cases}.$$

2. Nếu ΔABC đều, cạnh bằng a, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I là trọng tam } \Delta ABC \\ R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết:

a. A(1, 4), B(-4, 0), C(-2, -2).

b. A(1, 1), B(3, -2), C(4, 3).

c. $A(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $B(1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, C(0, 0).

Giải

a. Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC có dạng:

$(C):\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c \geq 0$

- Điểm $A(1, 4) \in (C) \Leftrightarrow 1+16-2a-8b+c=0.$ (1)
- Điểm $B(-4, 0) \in (C) \Leftrightarrow 16+8a+c=0.$ (2)
- Điểm $C(-2, -2) \in (C) \Leftrightarrow 4+4+4a+4b+c=0.$ (3)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), ta được $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-20$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-x-y-20=0$.

b. Nhận xét rằng

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(2, -3).(3, 2)=0 \Leftrightarrow AB\perp AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔABC được cho bởi:

$$(C): \begin{cases} \text{tam } I(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}) \text{ la trung diem BC} \\ R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-\frac{7}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{13}{2}.$$

c. Nhận xét rằng

$$AB=BC=CA=\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$(C): \begin{cases} \text{tam } I(\frac{2}{3},0) \text{ la trong tam } \Delta ABC \\ R=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-\frac{2}{3})^2+y^2=\frac{4}{9}.$$

Ví dụ 3: Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I(5, 6) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

$$(d): \frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}.$$

Giải

Ta có thể giải bằng hai cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số, ta được:

$$(d): \begin{cases} x=2+4t \\ y=3t \end{cases}, t\in R.$$

Đường tròn (C) có:

$$(C): \begin{cases} \text{tam } I(5,6) \\ \text{bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-5)^2+(y-6)^2=R^2. \quad (1)$$

Thay x, y từ phương trình tham số của (d) vào (C), ta được:

$$25t^2-60t+45-R^2=0. \quad (2)$$

(C) tiếp xúc với (d) ⇔ phương trình (2) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow R^2=9 \text{ (khi đó ta được } t=\frac{6}{5}\text{)}$$

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-6)^2=9$.

Cách 2: Chuyển phương trình của (d) về dạng tổng quát, ta được:

(d): $3x-4y-6=0$.

Gọi R là bán kính đường tròn (C). (C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi:

$$R=d(I,(d))=\frac{|3.5-4.6-6|}{\sqrt{9+16}}=3.$$

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-6)^2=9$.

Chú ý: Nếu giả thiết cho (C) tiếp xúc với (d): $Ax+By+C=0$ tại điểm $M(x_0, y_0)$, ta có được các điều kiện sau:

a. Tâm I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M(x_0,y_0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(A.B) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=x_0+At \\ y=y_0+Bt \end{cases}, t\in R \Rightarrow I(x_0+At, y_0+Bt)$$

b. (C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi IM=R.

Ví dụ 4: Lập phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A(-1, -2) và tiếp xúc với đường thẳng (d): 7x-y-5=0 tại điểm M(1, 2).

Giải

Vì (C) tiếp xúc với (d) tại điểm M, suy ra tâm I của (C) thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M(1,2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1+7t \\ y = 2-t \end{cases}, t \in R \Rightarrow I(1+7t, 2-t).$$

(C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi

$IM=R \Leftrightarrow R^2=IM^2=50t^2$.

Khi đó phương trình của đường tròn (C) có dạng:

$(C): (x-1-7t)^2+(y-2+t)^2=50t^2$. (1)

Điểm $A(-1, -2) \in (C) \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow I(-6, 3)$ và bán kính $R^2=50$.

Vậy phương trình $(C): (x+6)^2+(y-3)^2=50$.

Ví dụ 5: Cho ba đường thẳng

$(d): x+y+1=0, (d_1): x+2y+3=0, (d_2): x+2y+9=0.$

Lập phương trình đường tròn có tâm I thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Giải

Gọi (C) là đường tròn tâm I(a, b), bán kính R thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Nhận xét rằng

  $(d_1)//(d_2) \Rightarrow 2R=d((P_1), (P_2)) =2\sqrt{3} \Rightarrow R=\sqrt{3}$.
- Từ

  $$\begin{cases} (S)\text{tiếp xúc}(P_1) \\ (S)\text{tiếp xúc}(P_2) \end{cases} \Rightarrow d(I, (d_1))=d(I, (d_2)) \Leftrightarrow a+2b+6=0. \quad (1)$$
- Từ $I \in (d) \Rightarrow a+b+1=0$. (2)

Với (1), (2), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a+2b+6=0 \\ a+b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow I(4, -5).$$

Vậy đường tròn $(C): (x-4)^2+(y+5)^2=3$.

Ví dụ 6: Cho ba điểm A(0, a), B(b, 0), C(-b, 0) với a, b>0.

a. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với AB tại B, và tiếp xúc với AC tại C.

b. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường tròn ở phần a). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh $d_1.d_2= d_3^2$.

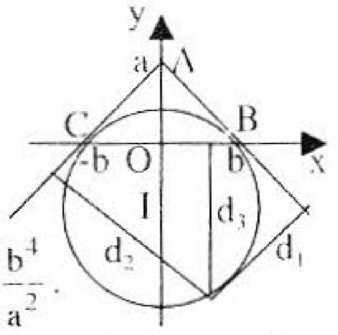
Giải

a. Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng:

$(C): (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

Vì AB, AC đối xứng qua Oy, suy ra tâm $I(\alpha, \beta) \in Oy \Rightarrow \alpha=0$.

(C) tiếp xúc với AB tại B, suy ra



$$\begin{cases}\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}=0\\ R=IB\end{cases}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\dfrac{b^2}{a}\\ R=\sqrt{b^2+\beta^2}\end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường tròn (C): $x^2+(y+\dfrac{b^2}{a})^2=b^2+\dfrac{b^4}{a^2}$.

b. Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AB): \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1 \Leftrightarrow (AB): ax+by-ab=0.$$

Phương trình đường thẳng (AC) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AC): \frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=1 \Leftrightarrow (AC): ax-by+ab=0.$$

Lấy điểm $M(x_0, y_0)\in(C)$, suy ra:

$$x_0^2+(y_0+\frac{b^2}{a})^2=b^2+\frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+2\frac{b^2}{a}y_0-b^2=0. \qquad (1)$$

Khoảng cách d_1, d_2, d_3 từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC được cho bởi:

$$d_1=\frac{|ax_0+by_0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}};\ d_2=\frac{|ax_0-by_0+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}};\ d_3=y_0.$$

Khi đó:

$$d_1.d_2=\frac{|a^2x_0^2-(by_0-ab)^2|}{a^2+b^2}=\frac{|a^2x_0^2-b^2y_0^2+2ab^2y_0-a^2b^2|}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với $a^2\neq0$, ta được

$$a^2x_0^2+a^2y_0^2+2ab^2y_0-a^2b^2=0 \Leftrightarrow a^2x_0^2+2ab^2y_0-a^2b^2=-a^2y_0^2 \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được $d_1.d_2=y_0^2=d_3^2$ (đpcm).

Chú ý: Từ việc biết cách lập phương trình đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng, rồi với hai đường thẳng cho trước chúng ta tiến gần tới bài toán lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác, tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng ta cần quan tâm tới dạng đặc thù của tam giác để có được lời giải ngắn gọn, cụ thể ta cân nhắc lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tổng quát, ta có thể lựa chọn một trong hai cách để thực hiện:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước

Bước 1: Viết phương trình hai phân giác trong của góc A, B.

Bước 2: Tâm I là toạ độ giao điểm của hai đường phân giác trên.

Bước 3: Tính khoảng cách từ I tới một cạnh của tam giác, ta được bán kính.

Bước 4: Thiết lập phương trình đường tròn.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính diện tích S của ΔABC và các cạnh, từ đó suy ra bán kính r bởi công thức $r=\dfrac{S}{p}$.

Bước 2: Gọi I(a, b) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, khi đó từ điều kiện khoảng cách từ I tới ba cạnh bằng r ta có được hệ theo hai ẩn a, b ⇒ toạ độ của I.

Bước 3: Thiết lập phương trình đường tròn.

Hướng 2: Dựa trên dạng đặc biệt của ΔABC, tức là:

1. Nếu ΔABC đều, cạnh bằng a, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I la trong tam } \Delta ABC \\ R = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}.$$

2. Nếu ΔABC cân tại A, ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi E là trung điểm BC.
Lập phương trình tham số của (AE).

Bước 2: Tâm I∈(AE) và thoả mãn:

$$\frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IE}} = -\frac{BA}{BE}.$$

Bước 3: Thiết lập phương trình đường tròn (C) với:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I} \\ r = IE \end{cases}.$$

Ví dụ 7: Cho hai điểm A(8, 0), B(0, 6). Lập phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB.

Giải

Giả sử đường tròn (C) có tâm I(a, b) và bán kính r.

Cách 1: Tâm I thuộc đường phân giác trong của góc ∠AOB và phân giác trong của góc ∠BAO.

Phương trình phân giác trong của góc ∠AOB là x-y=0.

Phương trình cạnh (AB) được cho bởi:

$$(AB): \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x+4y-24=0.$$

Phương trình các đường phân giác của góc ∠BAO được cho bởi:

$$\frac{3x+4y-24}{\sqrt{9+16}} = \pm\frac{y}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta_1): 3x - y - 24 = 0 \\ (\Delta_2): 3x + 9y - 24 = 0 \end{array}\right..$$

(Δ_2) là đường phân giác trong của góc ∠BAO.

Khi đó toạ độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 9y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2, 2).$$

Bán kính r được cho bởi r=d(I, OA)=2.

Vậy phương trình (C): $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

Tâm I(a, b) thuộc góc phần tư thứ nhất, suy ra a, b>0.

(C) tiếp xúc với OA, OB, vậy a=b=r.

Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = p.r \qquad (1)$$

trong đó:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=24 \qquad (2)$$

$$p=\frac{1}{2}(OA+OB+AB)=12 \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $r=2$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Ví dụ 8: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2-4x-2y+3=0.$$

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với (C) qua điểm E(1, 2).

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp quỹ tích

Với mỗi $M(x, y)\in(C_1)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1)\in(C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua E

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases}(x_1-2)^2+(y_1-1)^2=2\\ x_1+x=2\\ y_1+y=4\end{cases} \Rightarrow x^2+(y-3)^2=2. \qquad (*)$$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2+(y-3)^2=2$.

Cách 2: Xét đường tròn (C) có tâm I(2, 1) và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Gọi I_1 là tâm đường tròn (C_1).

Vì (C) và (C_1) đối xứng qua điểm E $\Rightarrow$ E là trung điểm II_1, do đó $I_1(0, 3)$.

Phương trình đường tròn (C_1) được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases}\text{tam } I_1(0,3)\\ \text{bán kính } R=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow (C_1): x^2+(y-3)^2=2.$$

Nhận xét: Vẫn với phương pháp như trên chỉ có điều bây giờ điểm E được thay bởi đường thẳng (d) cho trước, cụ thể:

Ví dụ 9: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0.$$

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với (C) qua đường thẳng (d): $x-2=0$.

Giải

Với mỗi $M(x, y)\in(C_1)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1)\in(C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $x=1$

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases}(x_1-1)^2+(y_1-2)^2=2\\ x_1+x=4\\ y_1=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-1)^2+(y_1-2)^2=2\\ x_1=4-x\\ y_1=y\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=2.$$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2+(y-3)^2=2$.

Ví dụ 10: Cho n điểm $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ và n+1 số k_1, k_2,...,k_n, k sao cho $k_1+k_2+...+k_n \neq 0$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + ... + k_n MA_n^2 = k.$$

Giải

Giả sử toạ độ của M(x, y), ta có:

$$k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + ... + k_n MA_n^2 = k$$

$$\Leftrightarrow k_1[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+k_2[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]+...+k_n[(x-x_n)^2+(y-y_n)^2]=k$$

$$\Leftrightarrow (k_1+k_2+...+k_n)(x^2+y^2)-2(k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n)x-$$

$$-2(k_1y_1+k_2y_2+...+k_ny_n)y+k_1(x_1^2+y_1^2)+$$

$$+k_2(x_2^2+y_2^2)+...+k_n(x_n^2+y_n^2)=k \quad (1)$$

Đặt:

$$a=\frac{k_1x_1+...+k_nx_n}{k_1+...+k_n},\ b=\frac{k_1y_1+...+k_ny_n}{k_1+...+k_n},$$

$$c=\frac{k_1(x_1^2+y_1^2)+...+k_n(x_n^2+y_n^2)-k}{k_1+...+k_n}.$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Vậy:

- Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm I(a, b) bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì tập hợp điểm M là điểm I(a, b).
- Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì tập hợp điểm M là một tập rỗng.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Lập phương trình đường tròn biết :

a. Tâm I(2, 2) bán kính R=3.

b. Đường kính AB với A(1, -2) và B(3, 2).

Bài tập 2: Lập phương trình đường tròn biết :

a. Đi qua điểm A(3, 1) và tâm I(1, 2).

b. Đi qua điểm A(3, 1), B(5, 5) và tâm I nằm trên trục hoành.

c. Đi qua điểm A(0, 1), B(1, 0) và tâm I nằm trên (d): x+y+2=0.

Bài tập 3: Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết ba cạnh thuộc ba đường thẳng:

$$x-5y-2=0,\ x-y+2=0,\ x+y-8=0.$$

Bài tập 4: Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I(1, 1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

$$(d): \begin{cases} x = 4t \\ y = 3-3t \end{cases}, t \in R.$$

Bài tập 5: Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm (0, 1). Tìm quỹ tích tâm của đường tròn đó.

Bài tập 6: Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng (d): x-y-2=0 tại điểm M(3, 1) và tâm I thuộc đường thẳng (d_1): 2x-y-2=0.

Bài tập 7: Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1): $2x+y-1=0$, (d_2): $2x-y+2=0$ và có tâm thuộc đường thẳng (d): $x-y-1=0$.

Bài tập 8: Viết phương trình đường tròn đi qua A(2, -1) và tiếp xúc với Ox, Oy.

Bài tập 9: Cho hai điểm A(4, 0); B(0, 3). Lập phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB.

Bài tập 10: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $4x - 3y - 12=0$,

(d_2): $4x + 3y - 12=0$.

a. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác có ba cạnh lần lượt nằm trên các đường thẳng (d_1), (d_2) và trục tung.

b. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác nói trên.

Bài tập 11: Cho hai điểm A(a, 0) và B(0, b) với $ab\neq0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C với tung độ $y_C = m$ (m là tham số). Lấy mọi giá trị khác 0 và khác $\frac{a^2+b^2}{2b}$.

a. Đường thẳng AB cắt đường tròn (C) tại giao điểm thứ hai là P. Xác định toạ độ của P.

b. Xác định tâm K của đường tròn (K) tiếp xúc với Oy tại B, và đi qua P.

c. Giả sử $(C)\cap(K)=\{P, Q\}$. CMR khi m thay đổi, PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 12: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0.$$

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d), biết:

a. (d): $y-1=0$.

b. (d): $x-y-3=0$.

Bài tập 13: Cho ΔABC biết B(0, 1), C(1, 0) và trực tâm H(2, 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài tập 14: Cho ba điểm A(1, 2), B(-3, 1) và C(4, -2). Lập phương trình quỹ tích các điểm M thoả mãn

$$MA^2+MB^2=MC^2.$$

Bài tập 15: Cho ba điểm A(3, 1), B(0, 7), C(5, 2). Giả sử M là điểm chạy trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR khi đó trọng tâm G của ΔMBC chạy trên một đường tròn, lập phương trình chính tắc của đường tròn đó.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. (C): $(x-2)^2+(y-2)^2=9$.

b. (C): $(x-2)^2+y^2=5$.

Bài tập 2:

a. (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

b. (C): $(x-10)^2+y^2=50$.

c. (C): $x^2+y^2+2x+2y-3=0$.

Bài tập 3: (C): $x^2+y^2-4x-22=0$.

Bài tập 4: (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Bài tập 5: (C): $(x-a)^2+(y-\frac{a^2+1}{2})^2=(\frac{a^2+1}{2})^2$

Quĩ tích tâm I thuộc Parabol có phương trình $x^2-2y+1=0$.

Bài tập 6: (C): $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

Bài tập 7: Tồn tại hai đường tròn

$$(C_1): (x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{121}{20} \text{ và } (C_2): (x+\frac{1}{4})^2+(y+\frac{5}{4})^2=\frac{121}{80}.$$

Bài tập 8: Có hai đường tròn thoả mãn.

Bài tập 9: (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Bài tập 10: (C): $(x-\frac{4}{3})^2+y^2=\frac{16}{9}$.

Bài tập 11:

a. $P(a\left[1-\frac{2b^2m}{a^2+b^2}\right], \frac{2b^2m}{a^2+b^2})$.

b. Ta được $K(\frac{a^2+b^2-2mb}{2a}, b)$ và phương trình đường tròn (K) có dạng:

$$(K): x^2+y^2-\frac{a^2+b^2-2mb}{a}x-2by+b^2=0.$$

c. (PQ): $(a^2-b^2+2mb)x+2a(m-b)y-a(a^2-b^2)=0$ và đi qua điểm cố định M có toạ độ:

$$\Leftrightarrow x_M=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \text{ và } y_M=-\frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$$

Bài tập 12:

a. (C_1): $x^2+(y-3)^2=2$.

b. (C_1): $(x-5)^2+(y+2)^2=2$.

Bài tập 13: Hướng dẫn

Cách 1: Lập phương trình cạnh AB, thoả mãn :

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtpt } \overrightarrow{CH} \end{cases}$$

Lập phương trình cạnh AC, thoả mãn :

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BH} \end{cases}$$

Từ đó xác định được toạ độ điểm $A=(AB)\cap(AC)$.

Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Cách 2: Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua BC. Do đó:

Lập phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm H, B, C.

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua BC.

Bài tập 14: (C): $x^2+y^2+12x-10y-5=0$.

Bài tập 15: (C): $x^2+y^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{5}{3}=0$.

BÀI TOÁN 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của điểm với đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với đường tròn (C) là $\mathscr{P}_{M/(C)}$.

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}<0 \Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}=0 \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)}>0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- Nếu M nằm trong (C) $\Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến của (C) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.
- Nếu M nằm trên (C) $\Rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (C) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi toạ độ).
- Nếu M nằm ngoài (C) $\Rightarrow$ tồn tại hai tiếp tuyến của (C) đi qua M.

Bài toán 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách h từ I tới (d), rồi so sánh với bán kính R của đường tròn, ta được:

- Nếu $h>R \Leftrightarrow (d)\cap(C)=\{\varnothing\}$.
- Nếu $h=R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với (C).
- Nếu $h<R \Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (C).

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt ta có khái niệm chùm đường tròn dạng 1:

" *Phương trình đường tròn đi qua giao điểm của đường thẳng*

$(d): Ax+By+C=0,$

$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

có dạng:

$x^2+y^2-2ax-2by+c+m(Ax+By+C)=0.$ "

Bài toán 3: Xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách I_1I_2 (I_1, I_2 là hai tâm của hai đường tròn), rồi so sánh với tổng và hiệu hai bán kính R_1, R_2 của hai đường tròn, ta được:

- Nếu $I_1I_2 > R_1+R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $I_1I_2 < |R_1-R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và lồng nhau.
- Nếu $I_1I_2 = R_1+R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.
- Nếu $I_1I_2 = |R_1-R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Phương pháp này thường được sử dụng để xác định số nghiệm của bài toán tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C_1) và (C_2), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2).

Chú ý: Trong trường hợp hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt ta có khái niệm chùm đường tròn dạng 2:

" *Phương trình đường tròn đi qua giao điểm của đường thẳng*

$$(C_1): x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,$$
$$(C_2): x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

có dạng:

$$\lambda(x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2)=0$$

với λ, $\mu \in R$ và $\lambda^2+\mu^2>0$. "

Nhận xét quan trọng:

1. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a(m)x-2b(m)x+c(m)=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a(m)x-2b(m)x+c(m)\ge 0 \\ Ax+By+C\ge 0 \end{cases}$$

2. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a_1(m)x-2b_1(m)x+c_1(m)=0 \\ x^2+y^2-2a_2(m)x-2b_2(m)x+c_2(m)=0 \end{cases}$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1(m)x - 2b_1(m)x + c_1(m) \le 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2(m)x - 2b_2(m)x + c_2(m) \le 0 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm M(6, 2) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm M nằm ngoài (C).

b. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1, 2) và bán kính $R=\sqrt{5}$.

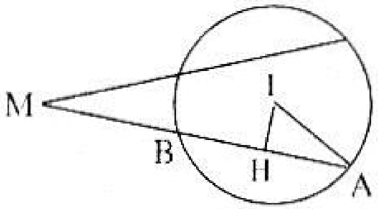
a. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(C)}=(6-1)^2+(2-2)^2-5=20>0 \Leftrightarrow \text{M nằm ngoài đường tròn.}$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB, ta có:

$$IH^2=IA^2-AH^2=R^2-\frac{AB^2}{4}=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow IH=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Đường thẳng (d) đi qua M có dạng:

(d): $A(x-6)+B(y-2)=0 \Leftrightarrow$ (d): $Ax+By-6A-2B=0$.

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài khi và chỉ khi:

$$d(I, (d))=IH \Leftrightarrow \frac{|A+2B-6A-2B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm 3B.$$

- Với A=-3B, ta được (d_1): $x-3y=0$.
- Với A=3B, ta được (d_2): $x+3y-12=0$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Các em học sinh cần linh hoạt khi điều kiện của bài toán phát biểu lại dưới dạng khác, thí dụ:

a. $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$, ta có thể thực hiện phép biến đổi:

$$\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{BA} \ \& \ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$$

Khi đó:

$$\mathscr{P}_{M/(C)}=20=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=2AB^2 \Leftrightarrow AB^2=10 \Leftrightarrow AB=\sqrt{10}.$$

b. $MA^2+MB^2=50$, ta có thể thực hiện phép biến đổi:

$$AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}=MB^2+MA^2-2\mathscr{P}_{M/(C)}$$

$$=50-2.20=10$$

$$\Leftrightarrow AB=\sqrt{10}.$$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): x+y-1=0 \text{ và } (C): x^2+y^2-1=0.$$

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $2x - y - 2 = 0$. .

Giải

a. Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) và bán kính R = 1.

Ta có:

$$d(O, (d)) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R$$

Vậy (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Đường tròn (S) đi qua các giao điểm của (d) và (C), có dạng

$$(S): x^2+y^2-1+m(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+mx+my-1-m=0 \quad (1)$$

suy ra tâm $I(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2})$.

(S) tiếp xúc với (Δ)

$$\Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(-\frac{m}{2}) + \frac{m}{2} - 2|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{\frac{m^2}{2} + m + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 12m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Thay $m=-\frac{2}{3}$ vào (1) ta được phương trình (S): $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0$.

Chú ý: Cũng có thể giải bằng cách lập luận (S) tiếp xúc đường thẳng (Δ)

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm kép

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + mx + my - 1 - m = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2+(2x-2)^2+mx+m(2x-2)-1-m=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow 5x^2+(3m-8)x+3-3m=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow (3m-8)^2-4.5.(3-3m)=0 \Leftrightarrow 9m^2+12m+4=0 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$.

Thay $m=-\frac{2}{3}$ vào (1) ta được phương trình (S): $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}=0$.

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn

$$(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2+2x-2y-14=0.$$

a. CMR hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b. Viết phương trình đường tròn qua giao điểm của (C_1), (C_2) và qua điểm M(3, 0).

Giải

a. Ta có :

- Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1, -2)$ và bán kính $R_1=3$.
- Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1, 1)$ và bán kính $R_2=4$.

Ta có:

$I_1I_2=\sqrt{(1+1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}$,

$|R_1-R_2|=0<I_1I_2<2=R_1+R_2 \Leftrightarrow (C_1)\cap(C_2)=\{A, B\}$.

b. Đường tròn (S) đi qua các giao điểm của (C_1) và (C_2), có dạng:

$(S): \lambda(x^2+y^2+2x-2y-14)+\mu(x^2+y^2-2x+4y-4)=0$

$\Leftrightarrow (S): (\lambda+\mu)x^2+(\lambda+\mu)y^2-2(\mu-\lambda)x-2(\lambda-2\mu)y-14\lambda-4\mu=0 \qquad (1)$

Điểm $M(3, 0)\in(S)$

$9(\lambda+\mu)-3(\mu-\lambda)-14\lambda-4\mu=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu$

Thay $\lambda=\mu$ vào (1) ta được:

$(S): x^2+y^2+y-9=0$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-x=0 \\ x+ay-a=0 \end{cases}$$

a. Tìm a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b. Gọi (x_1, y_1), (x_2, y_2) là các nghiệm của hệ đã cho. CMR:

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\le 1$.

Giải

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} & (1) \\ x+ay-a=0 & (2) \end{cases}$$

- Phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I(\frac{1}{2}, 0)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.
- Phương trình (2) là đường thẳng (d).

a. Hệ có hai nghiệm phân biệt ⇔ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, d)<R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}-a\right|}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<a<\frac{4}{3}.$$

b. Với $0<a<\frac{4}{3}$, $(d)\cap(C)=\{A, B\}$ có toạ độ là $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Ta có:

$AB\le 2R \Leftrightarrow AB^2\le 4R^2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\le 1$, đpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho điểm M(2, 1) và đường tròn (C) có phương trình:

$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5$.

a. Chứng tỏ rằng điểm M nằm trong (C).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm E, F sao cho M là trung điểm EF.

c. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{5}$.

d. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm C, D sao cho $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MD}$.

Bài tập 2: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): x-7y+10=0 \text{ và } (C): x^2+y^2-2x+4y-20=0.$$

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Lập phương trình đường tròn đi qua A, B và đi qua điểm C(1, -2).

Bài tập 3: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

$$(C_1): x^2+y^2-1=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2-4x=0.$$

a. CMR hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b. Lập phương trình đường tròn qua giao điểm của (C_1) và (C_2) và qua điểm M(3, 0).

c. Lập phương trình đường tròn đi qua giao điểm của (C_1), (C_2) và tiếp xúc với đường thẳng $x+y-2=0$.

d. Lập phương trình đường thẳng qua giao điểm của (C_1), (C_2) và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có tổng chiều dài lớn nhất.

Bài tập 4: Cho hai đường tròn (C) và (C_m) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2-x-6y+8=0 \text{ và } (C_m): x^2+y^2-2mx-1=0.$$

Xác định m để (C) và (C_m) tiếp xúc với nhau. Chỉ rõ loại tiếp xúc.

Bài tập 5: Tìm a sao cho hệ phương trình sau có nhiều nghiệm nhất

$$\begin{cases} |x-1|+|y-1|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

Bài tập 6: Xác định m để hệ bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 2]$:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2 \\ x-y+m=0 \end{cases}$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\mathscr{P}_{M/(C)}<0$.

b. $(d_1): x-y-1=0$.

c. $(d_2): y-2=0$.

d. Có hai đường thẳng $(d_3): x-2=0$ và $(d_4): y-1=0$.

Bài tập 2: (S): $x^2+y^2-x-3y-10=0$.

Bài tập 3:

a. Với mọi m.

b. Tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $2x-y-6=0$.

c. m=1 hoặc $m=\frac{3}{2}$.

d. m=-1 hoặc m=-5.

Bài tập 4:

b. (S): $11x^2+11y^2-32x-3=0$.

c. $(S_1): x^2+y^2-\frac{4}{m_1}x-1=0$ và $(S_2): x^2+y^2-\frac{4}{m_2}x-1=0$ với $m_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

BÀI TOÁN 4

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) (tâm I(a, b) bán kính R) thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa trên điều kiện K ta giả sử được đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): Ax+By+C=0.$$

Bước 2: (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d))=R.$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

Chú ý: Điều kiện K thường gặp:

1. Tiếp tuyến đi qua điểm M cho trước, khi đó:

   a. Nếu $M(x_0, y_0)\in(C)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(C)}=0$), ta có ngay:

   $$(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IM}(x_0-a, y_0-b) \end{cases} \Leftrightarrow (d): (x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

   $\Leftrightarrow (d): (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$ - *Phân đôi toạ độ.*

   b. Nếu $M(x_0, y_0)\notin(C)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(C)}\neq0$), ta giả sử:

   $$(d): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow (d): Ax+By-Ax_0-By_0=0$$

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$, khi đó:

   $$(d): Ax+By+\underline{D}=0.$$

3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$, khi đó:

   $$(d): Bx-Ay+\underline{D}=0.$$

4. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng k, khi đó:

   $$(d): y=kx+\underline{m} \Leftrightarrow (d): kx-y+\underline{m}=0.$$

5. Tiếp tuyến tạo với đường thẳng (Δ) một góc α, khi đó ta linh hoạt sử dụng một trong hai công thức:

   $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$, với $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d), (Δ).

   $\text{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$, với k_1, k_2 theo thứ tự là hsg của (d), (Δ)

Cách 2: Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi toạ độ để giải.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$x.x_0+y.y_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0. \quad (1)$$

(hoặc $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$).

Điểm $M\in(C)$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0 \quad (2)$$

(hoặc $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$)

Bước 2: Sử dụng điều kiện K của giả thiết, ta thiết lập thêm một phương trình theo x_0, y_0 (3)

Bước 3: Giải hệ tạo bởi (2), (3) ta được toạ độ tiếp điểm $M(x_0, y_0)$, từ đó thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến cần xác định.

Chú ý: Một mở rộng trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả đó là họ tiếp tuyến của đường tròn, dựa trên phương trình tham số của đường tròn, chúng ta sẽ minh hoạ trong bài toán sau:

Bài toán 2: Họ tiếp tuyến của đường tròn

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường tròn (C) có phương trình:

$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0, y_0)\in(C)$ có dạng:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2 \Leftrightarrow (x-a)\left(\frac{x_0-a}{R}\right)+(y-b)\left(\frac{y_0-b}{R}\right)=R.$$

Vì $M(x_0, y_0)\in(C)$

$$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x_0-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y_0-b}{R}\right)^2=1$$

do đó có thể đặt:

$$\frac{x_0-a}{R}=\sin t,\ \frac{y_0-b}{R}=\cos t \text{ với } t\in[0, 2\pi)$$

Khi đó mọi tiếp tuyến (d_t) của (C) có dạng:

(d_t): $(x-a)\sin t+(y-b)\cos t=R$.

Ta gọi các tiếp tuyến (d_t) với tham số t là họ tiếp tuyến của (C).

Toạ độ tiếp điểm của (C) với (d_t) là:

$$\begin{cases} x=a+R\sin t \\ y=b+R\cos t \end{cases}$$

Bài toán 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (C_1) và (C_2)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d): $Ax+By+C=0$, với $A^2+B^2>0$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Bước 2: Thiết lập điều kiện tiếp xúc của (d) với (C_1) và (C_2)

$$d(I_1, (d))=R_1 \ \&\ d(I_2, (d))=R_2.$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến chung (d).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua M, biết:

a. (C): $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ và M(2, 3).

b. (C): $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ và M(-4, -6).

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$p_{M/(C)}=0 \Leftrightarrow M\in(C)$$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M có dạng:

$$(d): (x-3)(2-3)+(y-1)(3-1)=9 \Leftrightarrow (d): x-2y+8=0.$$

b. Nhận xét rằng:

$$p_{M/(C)}>0 \Leftrightarrow M \text{ ở ngoài } (C).$$

Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm I(1, 4), bán kính R=5.

Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$$(d): A(x+4)+B(y+6)=0 \Leftrightarrow (d): Ax+By+4A+6B=0.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I,(d))=R \Leftrightarrow \frac{|A+4B+4A+6B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=5 \Leftrightarrow |A+2B|=\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow 3B^2+4AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=-\dfrac{4A}{3} \end{array}\right..$$

- Với B=0, ta được tiếp tuyến

  (d_1): A(x+4)=0 ⇔ (d_1): x+4=0.

- Với $B=-\dfrac{4A}{3}$, ta được tiếp tuyến

  (d_2): $A(x+4)-\dfrac{4A}{3}(y+6)=0 \Leftrightarrow (d_2): 3x-4y-12=0.$

Vậy qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C).

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): x.x_0+y.y_0-(x+x_0)-4(y+y_0)-8=0 \quad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0)\in(C)$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2x_0-8y_0-8=0 \quad (2)$$

Điểm $A(-4, -6)\in(d)$

$$\Leftrightarrow -4x_0-6y_0-(-4+x_0)-4(-6+y_0)-8=0 \Leftrightarrow x_0+2y_0-4=0 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0=-4 \ \& \ y_0=4 \\ x_0=4 \ \& \ y_0=0 \end{array}\right..$$

- Với $M_1(-4, 4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): x+4=0.
- Với $M_2(4, 0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): 3x-4y-12=0.

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (C) có dạng:

$$(d_t): (x-1)\sin t+(y-4)\cos t = 5. \qquad (1)$$

Điểm $M(-4, -6) \in (C)$

$$\Leftrightarrow -5\sin t - 10\cos t = 5 \Leftrightarrow \sin t = -2\cos t - 1$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases} \sin t = -2\cos t - 1 \\ (-2\cos t - 1)^2 + \cos^2 t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = -2\cos t - 1 \\ 5\cos^2 t + 4\cos t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = -2\cos t - 1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos t = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \,\&\, \sin t = -1 \\ \cos t = -\dfrac{4}{5} \,\&\, \sin t = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

- Với cost=0 & sint=-1, thay vào (1) ta được

  (d_1): x+4=0 và toạ độ tiếp điểm là $M_1(-4, 4)$.

- Với cost=$-\frac{4}{5}$ & sint=$\frac{3}{5}$, thay vào (1) ta được

  (d_2): 3x-4y-12=0 và toạ độ tiếp điểm là $M_2(4, 0)$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C) thoả mãn đầu bài.

Nhận xét: Như vậy nếu sử dụng cách 2 ta có thể trả lời được các câu hỏi:

a. Qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C).

b. Toạ độ các tiếp điểm là $M_1(-4, 4)$, $M_2(4, 0)$.

c. Phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm được suy ra từ (3), tức là:

   (M_1M_2): x+2y-4=0.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có phương trình:

(Δ): 3x-4y+12=0.

(C): $x^2+y^2-2x-6y+9=0$.

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với (Δ).

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1, 3), bán kính R=1.

Ta có ba cách giải sau:

Cách 1: Tiếp tuyến $(d)\perp(\Delta)$ có phương trình:

(d) : 4x+3y+c=0.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d))=R \Leftrightarrow \frac{|4.1+3.3+c|}{\sqrt{16+9}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = -18 \\ c_2 = -8 \end{array}\right..$$

- Với c_1=-18, ta được tiếp tuyến (d_1): 4x+3y-18=0.
- Với c_2=-8, ta được tiếp tuyến (d_2): 4x+3y-8=0.

Vậy tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

(d): $x.x_0+y.y_0-(x+x_0)-3(y+y_0)+9=0$

$\Leftrightarrow (d)$: $(x_0-1)x+(y_0-3)y-x_0-3y_0+9=0$ (1)

Vì $M(x_0, y_0)\in(C)$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2x_0-6y_0+9=0$ (2)

Đường thẳng $(d)\perp(\Delta)$ khi và chỉ khi:

$3.(x_0-1)-4(y_0-3)=0 \Leftrightarrow 3x_0-4y_0+9=0.$ (3)

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{9}{5}\ \&\ y_0=\dfrac{18}{5} \\ x_0=\dfrac{1}{5}\ \&\ y_0=\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$$

- Với $M_1(\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $4x+3y-18=0$.
- Với $M_2(\frac{1}{5}, \frac{12}{5})$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $4x+3y-8=0$.

Vậy tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (C) có dạng:

(d_t): $(x-1)\sin t+(y-3)\cos t=1.$ (1)

Đường thẳng $(d_t)\perp(\Delta)$ khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow 3\sin t-4\cos t=0 \Leftrightarrow \sin t=\frac{4\cos t}{3}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases} \sin t=\dfrac{4\cos t}{3} \\ \dfrac{16\cos^2 t}{9}+\cos^2 t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t=\dfrac{4\cos t}{3} \\ \cos t=\pm\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t=\dfrac{3}{5}\ \&\ \sin t=\dfrac{4}{5} \\ \cos t=-\dfrac{3}{5}\ \&\ \sin t=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$$

- Với $\cos t=\frac{3}{5}$ & $\sin t=\frac{4}{5}$, thay vào (1) ta được

  (d_1): $4x+3y-8=0$ và toạ độ tiếp điểm là $M_1(\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$.

- Với $\cos t=-\frac{3}{5}$ & $\sin t=-\frac{4}{5}$, thay vào (1) ta được

  (d_2): $4x+3y-18=0$ và toạ độ tiếp điểm là $M_2(\frac{1}{5}, \frac{12}{5})$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C) thoả mãn đầu bài.

Lưu ý: Như chúng ta đã được thấy trong chú ý của ví dụ 2, trong ví dụ này với cách 2 ta có ngay phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm M_1, M_2 được suy ra từ (3), tức là:

$$(M_1M_2): 3x - 4y + 9 = 0.$$

Tuy nhiên khi đầu bài không đòi hỏi tới tiếp điểm thì cách 2 lại quá cồng kềnh, ngoài ra còn rất dễ gây ra nhầm lẫn trong tính toán.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với (Δ): $2x+y-4=0$ một góc bằng 45^0.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1, -1) và bán kính $R=\sqrt{10}$.

Để xác định phương trình tiếp tuyến ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): (x-1)(x_0-1)+(y+1)(y_0+1)=10$$

$$\Leftrightarrow (d): (x_0-1)x+(y_0+1)y-x_0+y_0-8=0 \qquad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0)\in(C)$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^2+(y_0+1)^2=10 \qquad (2)$$

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45^0 khi và chỉ khi:

$$\cos45^0=\frac{|2(x_0-1)+1.(y_0+1)|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2x_0+y_0-1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y_0 = 6-2x_0 & (3) \\ y_0 = -4-2x_0 & (4) \end{array}\right..$$

a. Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \ \& \ y_0 = 2 \\ x_0 = 4 \ \& \ y_0 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(2,2) \\ M_2(4,-2) \end{array}\right..$$

b. Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (4) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \ \& \ y_0 = -4 \\ x_0 = -2 \ \& \ y_0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_3(0,-4) \\ M_4(-2,0) \end{array}\right..$$

- Với $M_1(2, 2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $x+3y-8=0$.
- Với $M_2(4, -2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $3x-y-14=0$.
- Với $M_3(0, -4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_3): $x+3y+12=0$.
- Với $M_4(-2, 0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_4): $3x-y+6=0$.

Vậy tồn tại bốn tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử tiếp tuyến (d) có phương trình:

$$(d): Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d))=R \Leftrightarrow \frac{|A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{10}. \qquad (2)$$

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45^0 khi và chỉ khi:

$$\cos 45^0 = \frac{|2A+B|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left[\frac{2A+B}{\sqrt{5}.\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=-3B \\ A=\dfrac{B}{3} \end{array}\right.$$

a. Với A=-3B, thay vào (2), ta được:

$$\frac{|-3B-B+C|}{\sqrt{(-3B)^2+B^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |C-4B|=10|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=14B \\ C=-6B \end{array}\right.$$

- Với C=14B, thay vào (1), ta được tiếp tuyến

  (d_1): $-3Bx+By+14B=0 \Leftrightarrow (d_1)$: $3x-y-14=0$.

- Với C=-6B, thay vào (1), ta được tiếp tuyến

  (d_2): $-3Bx+By-6B=0 \Leftrightarrow (d_2)$: $3x-y+6=0$.

b. Với $A=\frac{B}{3}$, tương tự - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

(C_1): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,
(C_2): $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên.

Giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1, 1)$ và bán kính $R_1=1$.
Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2, -1)$ và bán kính $R_2=2$.
Giả sử tiếp tuyến chung (d) có phương trình:

(d): $Ax+By+C=0$, với $A^2+B^2>0$ (1)

Ta có (d) tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1,(d))=R_1 \\ d(I_2,(d))=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1 \\ \dfrac{|2A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A+B+C|=\sqrt{A^2+B^2} \\ |2A-B+C|=2|A+B+C| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A+B+C|=\sqrt{A^2+B^2} \\ \left[\begin{array}{l} C=-3B \\ C=-\dfrac{1}{3}(4A+B) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} C=-3B \\ |A+B-3B|=\sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \\ \begin{cases} C=-\dfrac{1}{3}(4A+B) \\ |A+B-\dfrac{1}{3}(4A+B)|=\sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=-3B\,\&\,B=0 \\ C=-3B\,\&\,A=\dfrac{3B}{4} \end{array}\right.$$

Khi đó ta được hai tiếp tuyến chung:

(d_1): $Ax=0 \Leftrightarrow (d_1)$: $x=0$,

(d_2): $\frac{3B}{4}x+By-3B=0 \Leftrightarrow (d_2)$: $3x+4y-12=0$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến chung (d_1), (d_2) của (C_1) và (C_2).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho điểm A(3, 5) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0.$$

a. Hãy tìm phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến (C).

b. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại M, N. Hãy tính độ dài MN.

Bài tập 2: Cho họ đường tròn (C_a) có phương trình:

$$(C_a): x^2+y^2-(a-2)x+2ay-1=0.$$

a. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_a).

b. Chứng tỏ rằng khi a thay đổi, các đường tròn (C_a) luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm các điểm đó.

c. Cho a=-2 và điểm Q(3, 0). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C_{-2}) kẻ từ Q.

Bài tập 3: Cho điểm M(2, 4) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-1)^2+(y-3)^2=4.$$

a. Lập phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm AB.

b. Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn có hệ số góc k=-1.

Bài tập 4: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2-2x-6y+9=0$$

Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với (Δ): 2x-y=0 một góc bằng 45^0.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (C) và (C_m) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=1 \ \& \ (C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my=5.$$

a. CMR có 2 đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}) tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với 2 giá trị m_1, m_2 của m.

b. Xác định phương trình đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}).

Bài tập 6: Cho hai đường tròn (C) và (C_m) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2+3ax=0 \ \& \ (C_m): (m^2+1)(x^2+y^2)-2ax-2amy-3a^2=0$$

với a là hằng số, m là tham số.

CMR (C) và (C_m) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến với (C) và (C_m) tại mỗi điểm chung này vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hai đường tròn (C) và (C_m) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=1 \ \& \ (C_m): x^2+y^2-2mx-2y+m^2=0.$$

a. Xác định m để (C) và (C_m) tiếp xúc ngoài với nhau.

b. Với m tìm được ở câu a), hãy xác định vị trí của điểm $A\in(C)$ và $B\in(C_m)$ để diện tích ΔOAB lớn nhất và trong trường hợp đó, tính diện tích ΔOAB.

Bài tập 8: Cho đường tròn (C) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0,$$

$$(d): x-y-1=0.$$

Từ $M\in(d)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR khi đó đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 9: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

(C_1) : $x^2+y^2=4$ và (C_2): $x^2+y^2=16$.

Từ $M\in(C_2)$ luôn kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C_1), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm và giả sử hai tiếp tuyến này cắt (C_2) tại E_1, E_2.

a. Lập phương trình đường thẳng (T_1T_2). CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: (d_1): $y-5=0$, (d_2): $24x-7y-37=0$ và $MN=\frac{24}{5}$.

Bài tập 2:

a. Quỹ tích tâm I các đường tròn (C_a) là đường thẳng (d): $2x+y+2=0$.

b. Các đường tròn (C_a) luôn đi qua 2 điểm cố định $M_1(-2, -1)$ và $M_2(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

c. Qua Q(3, 0) kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C), với :

(d_1): $(45+12\sqrt{5})x-(18-12\sqrt{5})y-35=0$.

(d_2): $(45-12\sqrt{5})x-(18+12\sqrt{5})y-135=0$

Bài tập 3:

a. (Δ): $x+y-6=0$.

b. Có 2 tiếp tuyến là (d_1) , (d_2) của (C) thoả mãn điều kiện đầu bài là

(d_1): $x+y-4-2\sqrt{2}=0$ & (d_2): $x+y-4+2\sqrt{2}=0$.

Bài tập 4: Có bốn tiếp tuyến $(d_{1,1})$, $(d_{1,2})$, $(d_{2,1})$, $(d_{2,2})$ tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài là

$(d_{1,1})$: $x-3y+8-\sqrt{10}=0$, $(d_{1,2})$: $x-3y+8+\sqrt{10}=0$.

$(d_{2,1})$: $3x+y+6+\sqrt{10}=0$, $(d_{2,2})$: $3x+y+6-\sqrt{10}=0$.

Bài tập 5:

a. Ta có:

- Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) và bán kính R=1.
- Đường tròn (C_m) có tâm $I_m(m+1, -2m)$ và bán kính $R_m=\sqrt{5m^2+2m+6}$.

Nhận xét rằng: (C) và (C_m) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} OI_m = R + R_m \\ OI_m = |R - R_m| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -1 \\ m_2 = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

b. Tiếp tuyến chung của (C_{-1}) và $(C_{3/5})$ là

(d_1): $2x+y+3\sqrt{5}-2=0$ và (d_2): $2x+y-3\sqrt{5}-2=0$.

BÀI TOÁN 5

ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG TRÒN QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thuộc đường tròn (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1 : Ta thực hiện theo các bước :

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0)\in(C)$, suy ra:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0.

Cách 2 : Sử dụng phương trình tham số của đường tròn, như sau:

Bước 1: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x = a + R\sin\alpha \\ y = b + R\cos\alpha \end{cases}, \alpha\in[0, 2\pi).$$

Bước 2: Điểm $M\in(C) \Rightarrow M(a+R\sin\alpha, b+R\cos\alpha)$.

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Từ đó tìm được toạ độ của M.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm F(4, -2) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C) : (x-3)^2+(y-2)^2=5.$$

$$(\Delta): x-y-2=0.$$

a. Tìm các điểm có toạ độ nguyên thuộc (C).

b. Tìm trên (C) điểm E sao cho ΔOEF vuông.

Giải

a. Xét phương trình đường tròn (C) với ẩn y là:

$$y^2 - 4y + x^2 - 6x + 8 = 0$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4\leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x\leq 3+\sqrt{5}.$$

Suy ra các điểm $M(x, y)\in(C)$ có hoành độ nguyên là: 1, 2, 3, 4, 5, ta có:

x	1	2	3	4
y	$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right.$	$y\notin Z$	$\left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Vậy tồn tại các điểm $M_1(1, 3)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(2, 4)$, $M_4(2, 0)$, $M_5(4, 4)$, $M_6(4, 0)$ thuộc (C).

Chú ý. Trong trường hợp bán kính là hệ số chẵn theo giá trị lượng giác đặc biệt, ta có thể sử dụng phương trình tham số của đường tròn để giải - Đề nghị bạn đọc sử dụng theo cách giải này trong phần bài tập.

b. ΔOEF vuông gồm các khả năng sau:

Khả năng 1: ΔOEF vuông tại O <=> E=$(d_O)\cap(C)$, với (d_O) là đường thẳng qua O và vuông góc với OF. Ta có :

$$(d):\begin{cases}\text{qua } O\\ \text{vtpt } \overrightarrow{OF}(4,-2)\end{cases} \Leftrightarrow (d): 2x-y=0.$$

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ 2x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E_1(2,4)\\ E_2(\frac{4}{5},\frac{8}{5})\end{array}\right.$$

Khả năng 2: ΔOEF vuông tại F <=> E=$(d_F)\cap(C)$, với (d_F) là đường thẳng qua F và vuông góc với OF. Ta có :

$$(d):\begin{cases}\text{qua } F(4,-2)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{OF}(4,-2)\end{cases} \Leftrightarrow (d): 2x-y-10=0.$$

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ 2x-y-10=0\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Khả năng 3: ΔOEF vuông tại E <=> E=$(C_1)\cap(C)$, với (C_1) là đường tròn đường kính OF. Ta có :

(C_1): $(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ (x-2)^2+(y+1)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ x+3y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E_3(4,0)\\ E_4(1,1)\end{array}\right.$$

Chú ý. Cũng có thể sử dụng phương trình tham số của đường tròn để giải khả năng 3, như sau:

Điểm E∈(C) => E($3+\sqrt{5}\sin\alpha$, $2+\sqrt{5}\cos\alpha$).

Khi đó ΔOEF vuông tại E <=> $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{FE}$ <=> $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{FE}=0$ <=> $\sin\alpha+3\cos\alpha=-\sqrt{5}$

$$\xrightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}\begin{cases}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ của E.}$$

Ví dụ 2: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

Xác định toạ độ các đỉnh B, C của ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C), biết điểm A(-2, 2).

Giải

Ta có thể thực hiện theo bốn cách sau:

Cách 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua tâm I của đường tròn (C)

=> toạ độ điểm $A_1(4, 2)$.

Đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tam } A_1(4,2) \\ \text{bán kính } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): (x-4)^2+(y-2)^2=9.$$

Khi đó: $(C)\cap(C_1)=\{B, C\}$, toạ độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=9 \\ (x-4)^2+(y-2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=9 \\ 6x-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}.$$

Cách 2: Nhận xét rằng: ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C) $\Rightarrow$ tâm I là trọng tâm của ΔABC.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC $\Rightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IH} \Rightarrow H(\frac{5}{2}, 2)$.

Phương trình cạnh BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{5}{2}, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AI}(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x-\frac{5}{2}=0$$

Khi đó: $(BC)\cap(C)=\{B, C\}$, toạ độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=9 \\ x-\frac{5}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}.$$

Cách 3: Giả sử AB=a, khi đó: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}.6 \Leftrightarrow a^2=27$.

Điểm $M(x_0, y_0)\in(C)$ sao cho $AM^2=27$, ta có:

$$\begin{cases} (x_0-1)^2+(y_0-2)^2=9 \\ (x_0+2)^2+(y_0-2)^2=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)^2+(y_0-2)^2=9 \\ x_0=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

Cách 4: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x=1+3\sin\alpha \\ y=2+3\cos\alpha \end{cases}, \alpha\in[0, 2\pi).$$

Khi đó điểm $M\in(C) \Rightarrow M(1+3\sin\alpha, 2+3\cos\alpha)$. Khi đó:

$$AM^2=27 \Leftrightarrow (3+3\sin\alpha)^2+9\cos^2\alpha=27$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2} \xrightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \left[\begin{array}{l} \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases},$$

Nhận xét: Ví dụ trên minh hoạ phương pháp giải cho dạng toán :

" Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C). Xác định toạ độ các đỉnh B, C, biết toạ độ điểm $A \in (C)$."

Ví dụ 3: Cho điểm A(2, 0) và điểm M di chuyển trên đường tròn (C) tâm O bán kính bằng 2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên Oy.

a. Tính các toạ độ giao điểm P của các đường thẳng OM và AH theo góc $\alpha=(\overline{OA}, \overline{OM})$.

b. Xác định và vẽ quĩ tích của P khi m thay đổi trên (C).

Giải

Đường tròn (C): $x^2+y^2=4$

Điểm $M(a, b) \in (C) \Leftrightarrow a^2+b^2=4.$ (1)

H là hình chiếu vuông góc của M lên Oy, vậy H(0, b).

Phương trình (AH) được cho bởi:

$$(AH): \frac{x}{2}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow (AH): bx+2y-2b=0.$$

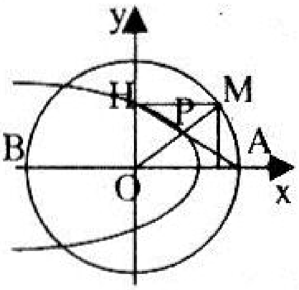
Phương trình OM là (OM): $bx-ay=0$.

Toạ độ giao điểm P là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} bx+2y-2b=0 \\ bx-ay=0 \end{cases} \quad (I)$$

Hệ có nghiệm khi

$-ab-2b\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0$ & $a\neq -2 \Leftrightarrow a\neq \pm 2.$



a. Ta có

$$M: \begin{cases} a = OM.\cos\alpha \\ b = OM.\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\cos\alpha \\ b = 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) \;\&\; P\left(\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+1}, \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+1}\right)$$

b. Xác định và vẽ quĩ tích của P khi M thay đổi trên (C).

Từ hệ (I), ta được $a=\frac{2x}{2-x}$ và $b=\frac{2y}{2-x}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được phương trình quĩ tích P là $y^2=4-4x$.

Vậy tập hợp điểm P thuộc Parabol $y^2=4-4x$ trừ hai điểm A, B (hình vẽ).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (C) có phương trình :

(C): $x^2+y^2-4x-6y+5=0$.

a. Tìm các điểm có toạ độ nguyên thuộc (C).

b. Xác định toạ độ các đỉnh B, C của ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C), biết điểm A(4, 5).

Bài tập 2: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2+y^2-4x-6y+11=0$

Tìm toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a. A(3, 2). b. A(0, 1).

Bài tập 3: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(\Delta): 3x-2y-1=0 \text{ và } (C): (x+1)^2+(y+2)^2=2.$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến (Δ) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 4: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): x+y-7=0 \text{ và } (C): (x-2)^2+(y-3)^2=2.$$

a. Xác định vị trí tương đối của (d) và (C).

b. Tìm trên (C) điểm $N(x_1, y_1)$ sao cho x_1+y_1 đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 5: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): x+y-2=0 \text{ và } (C): x^2+y^2-4x-4y+4=0.$$

1. CMR (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.
2. Tìm toạ độ điểm C thuộc (C) sao cho :
   a. ΔABC có diện tích bằng 2.
   b. ΔABC có diện tích lớn nhất.
   c. ΔABC có chu vi lớn nhất.
   d. ΔABC cân.
   e. ΔABC vuông.

Bài tập 6: Nêu phương pháp giải dạng toán:

" *Cho đường tròn (C) và điểm $A\in(C)$. Xác định toạ độ các đỉnh của các tam giác vuông nội tiếp (C) có diện tích bằng s và nhận A làm một đỉnh.* "

Áp dụng với điểm A(7, 1) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-2)^2+y^2=26.$$

Bài tập 7: Lập phương trình quỹ tích các điểm M từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) tâm $I(x_0, y_0)$ bán kính R tạo với nhau một góc 2α $(0<\alpha<90^0)$.

Áp dụng với đường tròn (C) có tâm I(1, 2), bán kính R=3 và $\alpha=60^0$.

Bài tập 8: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=1.$$

Đường tròn (C) cắt trục tung tại hai điểm A(0, 1) và B(0, -1). Đường thẳng $y=m$ $(-1<m<1,\ m\neq0)$ cắt (C) tại T và S, đường thẳng qua A, T cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi M thay đổi.

Bài tập 9: Cho hai đường tròn tâm A(1, 0) bán kính $r_1=4$ và tâm B(-1, 0) bán kính $r_2=2$. Tìm tập hợp tâm I(x, y) của các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn trên. Tập hợp đó gồm những đường gì ?

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Xét phương trình đường tròn (C) với ẩn y và tìm x để phương trình có nghiệm, từ đó suy ra hoành độ nguyên - Đề nghị bạn đọc tự làm như trong ví dụ 1.

Cách 2: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}, \alpha\in[0, 2\pi).$$

Khi đó điểm $M\in(C) \Rightarrow M(2+2\sqrt{2}\sin\alpha,\ 3+2\sqrt{2}\cos\alpha)$

Suy ra các giá trị góc α để x, y đều nguyên là: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ta được $M_1(0, 1)$, $M_2(0, 5)$, $M_3(4, 1)$, $M_4(4, 5)$.

b. Tương tự ví dụ 4.

Bài tập 2:

a. Ta có:

- $MA_{Min}=0$, đạt được khi M(3, 2).
- $MA_{Max}=2\sqrt{2}$, đạt được khi M(1, 4).

b. Ta có:

- $MA_{Min}=\sqrt{2}$, đạt được khi M(1, 2).
- $MA_{Max}=3\sqrt{2}$, đạt được khi M(3, 4).

Bài tập 3:

- $d(M, (\Delta))_{Min}=0$, đạt được khi M(3, 4).
- $d(M, (\Delta))_{Max}=2\sqrt{2}$, đạt được khi M(1, 2).

Bài tập 4: Đường tròn (C) tâm I(-1, -2), bán kính $R=\sqrt{2}$.

a. Ta có:

$$d(I, (d))=\frac{|3(-1)-2.(-2)-11|}{\sqrt{9+4}}=\frac{2}{\sqrt{13}}<R \Rightarrow (C)\cap(d)=\{A, B\}.$$

b. Chuyển phương trình đường tròn (C) về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x=-1+\sqrt{2}\sin\alpha \\ y=-2+\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}, \alpha\in[0, 2\pi) \Rightarrow N(-1+\sqrt{2}\cos\alpha, -2+\sqrt{2}\sin\alpha).$$

Ta được:

$$x_1+y_1=-1+\sqrt{2}\cos\alpha-2+\sqrt{2}\sin\alpha=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-3.$$

Suy ra:

- $(x_1+y_1)_{Max}=-1$, đạt được khi $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow N_1(0, -1)$.
- $(x_1+y_1)_{Min}=-5$, đạt được khi $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow N_2(-2, -3)$.

Bài tập 5:

1. Ta có A(2, 0), B(0, 2) và $AB=2\sqrt{2}$.
2. Chuyển phương trình đường tròn (C) về dạng tham số, từ đó:

a. ΔABC có diện tích bằng 2 tại $C_1(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ hoặc $C_2(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

b. ΔABC có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow CH_{Max}$.

Ta có $CH_{Max}=2\sqrt{2} \Rightarrow S_{Max}=4$, đạt được tại $C_0(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

c. $CV_{Max}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, đạt được tại $C(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

d. Tồn tại bốn điểm C để ΔABC cân là:

$C_3(4, 2)$, $C_4(2, 4)$, $C_5(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ và $C_6(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$.

e. Tồn tại hai điểm C để ΔABC vuông là $C_7(4, 2)$, $C_8(2, 4)$.

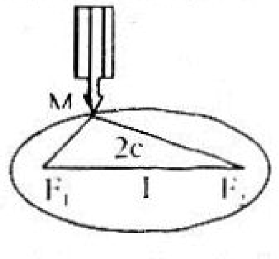
CHỦ ĐỀ 5

ELÍP

1. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm cố định F_1, F_2, với $F_1F_2=2c>0$.

Tập hợp những điểm M sao cho $MF_1+MF_2=2a$ *(a là một số không đổi và a>c) gọi là một Elíp.*



Vậy:

$$(E)=\{M \mid MF_1+MF_2=2a\}$$

- Hai điểm F_1, F_2 gọi là hai *tiêu điểm* của Elíp.
- Khoảng cách $F_1F_2=2c$ gọi là *tiêu cự* của Elíp.
- Trung điểm I của F_1F_2 gọi là *tâm* của Elíp.
- Với điểm M thuộc Elíp thì các khoảng cách MF_1 và MF_2 gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELÍP

Trong mặt phẳng Oxy, Elíp (E) có hai tiêu điểm $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ và có tổng hai bán kính qua tiêu ứng với điểm tuỳ ý $M(x, y)\in(E)$ là 2a (a>c) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } b^2=a^2-c^2.$$

Chú ý: Điểm $M(x, y)\in(E)$ luôn có:

$$F_1M=a+\frac{cx}{a} \text{ và } F_2M=a-\frac{cx}{a}.$$

3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ELÍP

Elíp (E) có phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

được chuyển về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\sin t \\ \dfrac{y}{b}=\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi) \Leftrightarrow (E): \begin{cases} x=a\sin t \\ y=b\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Đó là *phương trình tham số dạng lượng giác* của Elíp (E).

4. HÌNH DẠNG CỦA ELÍP

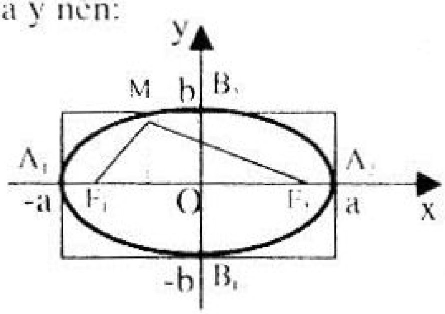
Với Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } a>b$$

ta xét các tính chất hình học của (E) bằng cách xét các tính chất đại số tương ứng của phương trình trên.

a. Phương trình của (E) có bậc chẵn đối với x và y nên:

- Nếu điểm $M(x, y)\in(E)$ thì các điểm $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ và $M_3(x, -y)$ cũng thuộc (E).
- (E) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc O làm *tâm đối xứng*.



b. (E) cắt các trục toạ độ tại bốn điểm:

- $(E)\cap Ox=\{A_1, A_2\}$ có toạ độ là $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ và đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trục lớn* của (E) có độ dài bằng 2a.
- $(E)\cap Oy=\{B_1, B_2\}$ có toạ độ là $B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$ và đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục nhỏ* của (E) có độ dài bằng 2b.
- Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là bốn đỉnh của Elíp (E).

Lưu ý: Hai tiêu điểm của Elíp (E) luôn ở trên trục lớn.

c. *Hình chữ nhật cơ sở*: hình chữ nhật có các đỉnh là giao điểm của các đường thẳng $x=\pm a$ và các đường thẳng $y=\pm b$ được gọi là hình chữ nhật cơ sở của (E). Vậy Elíp (E) nằm trong hình chữ nhật có tâm đối xứng O, có các kích thước là 2a, 2b.

d. Từ $M(x, y)\in(E)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}\le 1 \\ \dfrac{y^2}{b^2}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le a \\ |y|\le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a\le x\le a \\ -b\le y\le b \end{cases}.$$

5. TÂM SAI CỦA ELÍP

Tâm sai của Elíp là số thực e bằng tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của Elíp.

- Đối với Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a>b thì $e=\frac{c}{a}$.
- Đối với Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a<b thì $e=\frac{c}{b}$.

Chú ý:

a. Mọi Elíp đều có tâm sai nhỏ hơn 1.

b. Tâm sai e=0 suy ra:

$$c=0 \Leftrightarrow a=b$$

khi đó:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$$

Elíp trở thành đường tròn tâm O, bán kính bằng a.

BÀI TOÁN 1

XÁC ĐỊNH CÁC THUỘC TÍNH CỦA ELÍP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định các thuộc tính của Elíp (E).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

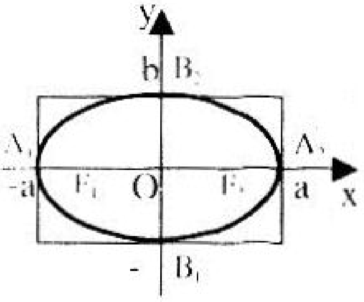
Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Elíp (E) về dạng chính tắc

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bước 2: Xét các khả năng:

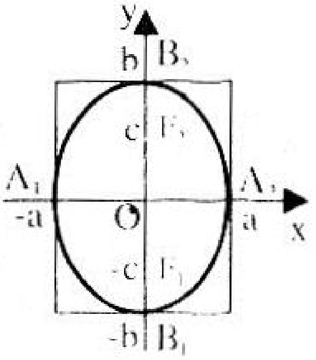
Khả năng 1: Nếu a>b, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Ox, độ dài bằng 2a chứa hai tiêu điểm $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ với $c^2=a^2-b^2$.
- (E) có trục nhỏ thuộc Oy với độ dài bằng 2b.
- Tâm sai $e=\frac{c}{a}$.



Khả năng 2: Nếu a<b, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Oy, độ dài bằng 2b chứa hai tiêu điểm $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ với $c^2=b^2-a^2$.
- (E) có trục nhỏ thuộc Ox với độ dài bằng 2a.
- Tâm sai $e=\frac{c}{b}$.



Chú ý: Trong trường hợp phương trình của (E) có dạng:

$$(E): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(E): \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục Oxy.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chuyển phương trình các Elíp sau về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình, biết:

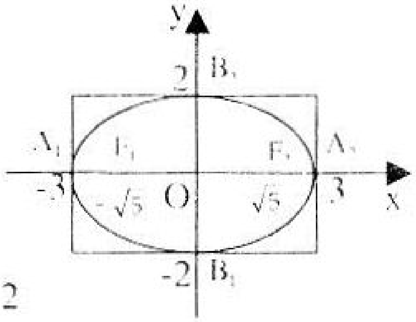
a. (E): $4x^2+9y^2=36$.

b. (E): $25x^2+16y^2=400$.

Giải

a. Chuyển phương trình của (E) về dạng:

(E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=3,\ b=2$ và $c=\sqrt{5}$.

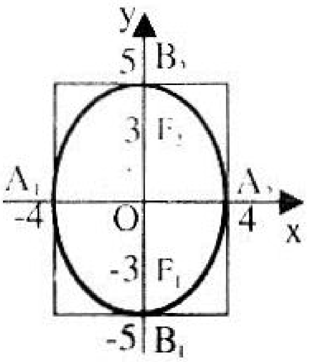


Suy ra (E) có các thuộc tính:

- Tâm O(0, 0).
- Trục lớn thuộc Ox có độ dài bằng 6 chứa 2 tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$.
- Trục nhỏ thuộc Oy có độ dài bằng 4.
- Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

b. Chuyển phương trình của (E) về dạng:

(E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow a=4,\ b=5$ và $c=3$.



Suy ra (E) có các thuộc tính:

- Tâm O(0, 0).
- Trục lớn thuộc Oy có độ dài bằng 10 chứa 2 tiêu điểm $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$.
- Trục nhỏ thuộc Ox có độ dài bằng 8.
- Tâm sai $e=\frac{3}{5}$.

Ví dụ 2: Cho họ đường cong (E_m) có phương trình:

(E_m): $(m-2)x^2-my^2=m^2-2m$.

a. Tìm điều kiện của m để (E_m) là một Elíp, từ đó xác định toạ độ các tiêu điểm.

b. Với điều kiện ở câu a) xác định phương trình tham số của (E_m).

Giải

a. Chuyển phương trình của (E_m) về dạng:

$$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2-m}=1. \qquad (1)$$

Do đó để (1) là phương trình của Elíp điều kiện là:

$$\begin{cases} m>0 \\ 2-m>0 \\ m\neq 2-m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<1 \\ 1<m<2 \end{array}\right..$$

Để xác định toạ độ các tiêu điểm ta xét hai trường hợp (so sánh a và b)

Trường hợp 1: Nếu $0<m<1$ thì $m<2-m$, khi đó:

$$F_1(0, -\sqrt{2-2m}) \text{ và } F_2(0, \sqrt{2-2m}).$$

Trường hợp 2: Nếu $1<m<2$ thì $m>2-m$, khi đó:

$$F_1(-\sqrt{2m-2}, 0) \text{ và } F_2(\sqrt{2m-2}, 0).$$

b. Phương trình tham số của (E_m) là:

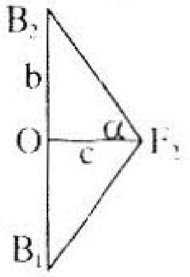
$$(E_m): \begin{cases} x = \sqrt{m}\sin t \\ y = \sqrt{2-m}\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Ví dụ 3: Tìm tâm sai của Elíp biết:

a. Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 2α.

b. Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng k lần ($k>\frac{1}{2}$) tiêu cự.

Giải



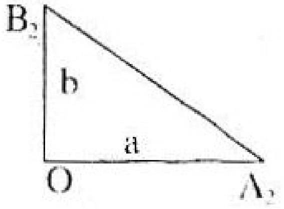
a. Từ giả thiết, ta có:

$$tg\alpha=\frac{b}{c} \Leftrightarrow b=ctg\alpha$$

suy ra:

$$e=\frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2+c^2}=\frac{c^2}{c^2tg^2\alpha+c^2}=\frac{1}{tg^2\alpha+1}=\cos^2\alpha \Leftrightarrow e=\cos\alpha$$

b. Từ giả thiết, ta có:



$$A_2B_2=2kc \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2kc \Leftrightarrow a^2+b^2=4k^2c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2+b^2+b^2=4k^2c^2 \Leftrightarrow b^2=\frac{(4k^2-1)c^2}{2}$$

suy ra:

$$e=\frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2+c^2}=\frac{c^2}{\frac{(4k^2-1)c^2}{2}+c^2}=\frac{2}{4k^2+1} \Leftrightarrow e=\sqrt{\frac{2}{4k^2+1}}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chuyển phương trình các Elíp sau về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình, biết:

a. (E): $4x^2+5y^2=20$. b. (E): $4x^2+9y^2=36$.

Trong các trường hợp xác định phương trình tham số của (E).

Bài tập 2: Vẽ các đường cong sau:

a. (E): $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ b. (E): $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}, t\in[\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ax^2+By^2+F=0, \text{ với } A.B>0,\ AF<0.$$

a. Là phương trình của một Elíp có đỉnh O(0, 0) nếu $A\neq B$. Tìm toạ độ các tiêu điểm của Elíp.

b. Là phương trình của một đường tròn có tâm O(0, 0) nếu A=B.

Bài tập 4: Cho họ Elíp có phương trình:

$$(E_m): x^2=2y-\frac{y^2}{m} \text{ với } m>1.$$

a. Đưa phương trình về dạng chính tắc, xác định toạ độ tâm, tiêu điểm F_1, F_2 và các đỉnh A_1, A_2 của Elíp.

b. Tìm quĩ tích các đỉnh A_1, A_2 của Elíp khi m thay đổi.

c. Tìm quĩ tích các tiêu điểm F_1, F_2 của Elíp khi m thay đổi.

BÀI TOÁN 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ELÍP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Lập phương trình của Elíp (E).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Elíp

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Nếu biết hai tiêu điểm $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ và độ dài trục lớn bằng 2a thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (E)$.

Bước 2: Chuyển $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1)

thành biểu thức giải tích nhờ:

$$MF_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \qquad (2)$$

$$MF_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \qquad (3)$$

Bước 3: Suy ra

$$MF_1 - MF_2 = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2}$$

$$= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) - 2x(x_1 - x_2) - 2y(y_1 - y_2)}{2a} \qquad (4)$$

Bước 4: Lấy (1)+(4) ta được MF_1, rồi thay vào (2) ta sẽ được phương trình của (E).

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Elíp hoặc chứng minh tập hợp điểm là Elíp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ và điểm $A(0, 3)$.

a. Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) đi qua điểm A và có 2 tiêu điểm là F_1, F_2.

b. Xác định phương trình tham số của (E).

Giải

a. Vì hai tiêu điểm F_1 và F_2 thuộc Ox và đối xứng qua Oy nên Elíp có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } a>b \quad (1)$$

- Tiêu cự $c=4 \Leftrightarrow a^2-b^2=4^2$ (2)
- Điểm $A(0, 3)\in(E) \Leftrightarrow b^2=9$ (3)
- Từ (2), (3) suy ra $a^2=25$, $b^2=9$.

Vậy phương trình (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

b. Khi đó (E) có phương trình tham số:

$$(E): \begin{cases} x = 5\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Ví dụ 2: Lập phương trình chính tắc của Elíp (E), biết:

a. Trục lớn thuộc Oy có độ dài trục lớn bằng 26 và tâm sai $e=\frac{12}{13}$.

b. Elíp đi qua các điểm $M(4, 0)$ và $N(2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Giải

a. Từ giả thiết ta giả sử Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } a<b.$$

- Độ dài trục lớn bằng 26 $\Leftrightarrow 2b=26 \Leftrightarrow b=13$.
- Tâm sai $e=\frac{12}{13}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{13^2-a^2}}{13} \Leftrightarrow a^2=25$.

Vậy Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1.$$

b. Giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

- Vì $M\in(E) \Leftrightarrow \frac{16}{a^2}=1 \Leftrightarrow a^2=16$,
- Vì $N(2, \frac{3\sqrt{3}}{2})\in(E) \Leftrightarrow \frac{4}{16}+\frac{27}{4b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=9$.

Vậy Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ví dụ 3: Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(\frac{20}{\sqrt{41}}, \frac{20}{\sqrt{41}})$, từ đó xác định phương trình tham số của nó.

Giải

Giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vì $A \in (E) \Leftrightarrow \frac{400}{41a^2} + \frac{400}{41b^2} = 1 \Leftrightarrow 400(a^2+b^2)=41a^2.b^2.$ (1)

Elíp (E) có tiêu cự bằng 6 $\Leftrightarrow 2c=6 \Leftrightarrow c=3.$ (2)

Tới đây ta xét hai khả năng có thể xảy ra:

Khả năng 1: Nếu a>b thì:

$(2) \Leftrightarrow a^2-b^2=9.$ (3)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (3), ta được $a^2=25$ và $b^2=16$, suy ra:

$$(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

và phương trình tham số của (E_1) có dạng:

$$(E_1): \begin{cases} x = 5\sin t \\ y = 4\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Khả năng 2: Nếu a<b – *Bạn đọc tự làm*

Ví dụ 4: Lập phương trình chính tắc của Elíp (E), biết hai tiêu điểm là $F_1(-1, -1)$, $F_2(3, 3)$ và độ dài trục lớn bằng 12.

Giải

Với $M(x, y) \in (E)$, ta được:

$MF_1+MF_2=12$ (1)

Ta có:

$MF_1^2=(x+1)^2+(y+1)^2$ (2)

$MF_2^2=(x-3)^2+(y-3)^2$ (3)

Suy ra

$$MF_1-MF_2=\frac{MF_1^2-MF_2^2}{MF_1+MF_2}=\frac{8x+8y-16}{12}=\frac{2x+2y-4}{3} \quad (4)$$

Lấy (1)+(4) ta được $MF_1=\frac{x+y+16}{3}$ (5)

Thay (5) vào (2) ta sẽ được

$$(\frac{x+y+16}{3})^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-xy-7x-7y-119=0.$$

Đó là phương trình của (E).

Ví dụ 5: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

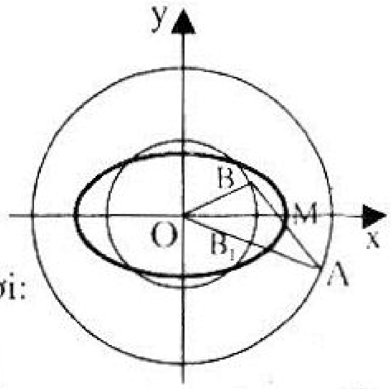
(C_1): $x^2+y^2=4$ và (C_2): $x^2+y^2=1$.

Các điểm A, B lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) sao cho Ox là phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Gọi M là trung điểm AB. Lập phương trình quỹ tích của M.

Giải

Xét đường tròn (C_1), (C_2), ta được:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tam O} \\ \text{Bán kính } R_1 = 2 \end{cases} \text{ và } (C_2): \begin{cases} \text{Tam O} \\ \text{Bán kính } R_2 = 1 \end{cases}.$$



Với $B(x_B, y_B) \in (C_2)$ thì:

$$x_B^2 + y_B^2 = 1. \qquad (1)$$

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua Ox

$\Rightarrow B_1(x_B, -y_B) \in OA$ và thoả mãn

$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB_1} \Rightarrow A(2x_B, -2y_B)$

Khi đó toạ độ trung điểm M của AB được cho bởi:

$$M: \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2x_B + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2y_B + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{2x}{3} \\ y_B = -2y \end{cases}. \qquad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{1/4} = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{1/4} = 1.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) và vẽ hình, biết:

a. Trục lớn thuộc Ox, có độ dài bằng 8, trục nhỏ thuộc bởi Oy, có độ dài bằng 6.

b. Trục lớn thuộc Oy, có độ dài bằng 10, tiêu cự bằng 6.

Bài tập 2: Lập phương trình chính tắc từ đó suy ra phương trình tham số của Elíp (E), biết:

a. Tâm O, một tiêu điểm là F(0, 2) và một đỉnh là A(-1, 0).

b. Đi qua các điểm $M(3\sqrt{3}, 2)$ và $N(3, 2\sqrt{3})$.

Bài tập 3:

a. Lập phương trình chính tắc của Elíp (E), biết trục lớn thuộc Ox, tiêu cự bằng 12, tâm sai bằng $\dfrac{3}{5}$.

b. Tìm toạ độ điểm M trên (E) sao cho $MF_1=2MF_2$.

Bài tập 4: Lập phương trình chính tắc từ đó suy ra phương trình tham số của Elíp (E), biết:

a. Phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 5=0$ và $y \pm 3=0$.

b. Tâm O, hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng $x+2=0$ và có diện tích bằng $8\sqrt{5}$.

c. Một đỉnh trên trục nhỏ là $A(-3, 4)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2+y^2=100$.

Bài tập 5: Lập phương trình chính tắc từ đó suy ra phương trình tham số của Elíp (E), biết:

a. Tâm O, tiêu điểm đều ở trên Ox, đi qua điểm $M(8, 12)$ và bán kính qua tiêu điểm trái của điểm M bằng 20.

b. Tâm O, một đỉnh trên trục nhỏ là $A(0, 3)$ và mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.

Bài tập 6: Lập phương trình của Elíp (E), biết:

a. Tâm $I(1, 1)$, tiêu điểm $F_1(1, 3)$, độ dài trục nhỏ bằng 6.

b. Hai tiêu điểm $F_1(2, 0)$, $F_2(0, 2)$ và độ dài trục lớn bằng 8.

c. Hai tiêu điểm $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 4)$ và đi qua gốc toạ độ.

Bài tập 7: Cho hai điểm $A_1(-a, 0)$ và $A_2(a, 0)$ với $a>0$ và hằng số $k\neq 0, 1$. Lập phương trình quỹ tích các điểm M thoả mãn

$$\text{tg}\, M\hat{A}_1A_2 . \text{tg}\, M\hat{A}_2A_1 = k^2.$$

Bài tập 8: Cho điểm $A(-4, 0)$ và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-4)^2+y^2=100.$$

Lập phương trình quỹ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (C).

Bài tập 9: Cho điểm $A(3, 3)$ và hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình:

$$(C_1): (x+1)^2+y^2=16 \text{ và } (C_2): (x-1)^2+y^2=1.$$

Gọi M là tâm đường tròn (C) di động tiếp xúc với (C_1), (C_2). Tìm quỹ tích điểm M, biết:

a. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. (C) tiếp xúc trong với cả (C_1) và (C_2).

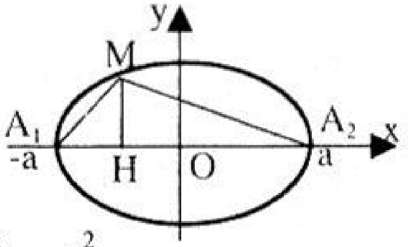
IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 7: Giả sử $M(x, y)$ và gọi H là hình chiếu của M lên AB thì $H(x, 0)$, ta có:

$$\text{tg}\, M\hat{A}_1A_2 . \text{tg}\, M\hat{A}_2A_1 = k^2 > 0$$

suy ra $M\hat{A}_1A_2$, $M\hat{A}_2A_1$ nhọn $\Rightarrow$ H nằm trong A_1A_2.

Ta có:



$$k^2 = \text{tg}\, M\hat{A}_1A_2 . \text{tg}\, M\hat{A}_2A_1$$

$$= \frac{HM}{HA_1} . \frac{HM}{HA_2} = \frac{HM^2}{A_1H.HA_2}$$

$$\Leftrightarrow k^2(x+a)(a-x)=y^2 \Leftrightarrow k^2x^2+y^2=k^2a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{k^2a^2}=1.$$

Vậy quỹ tích các điểm M thuộc Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{k^2a^2}=1$.

Bài tập 8: (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

BÀI TOÁN 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ELÍP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của điểm với Elíp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định vị trí tương đối của điểm $M(x_M, y_M)$ với Elíp (E):

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với Elíp (E) là:

$$\mathscr{P}_{M/(E)}=\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}.$$

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)}<1 \Leftrightarrow$ M nằm trong Elíp.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)}=1 \Leftrightarrow$ M nằm trên Elíp.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)}>1 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài Elíp.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- Nếu M nằm trong (E) $\Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến của (E) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.
- Nếu M nằm trên (E) $\Rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (E) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi toạ độ).
- Nếu M nằm ngoài (E) $\Rightarrow$ tồn tại hai tiếp tuyến của (E) đi qua M.

Bài toán 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng với Elíp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (E).

Chú ý: Với hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1.$$

Nếu $(E_1)\cap(E_2)=\{A, B, C, D\}$ thì

a. ABCD là hình chữ nhật.

b. Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là đường tròn (C) tâm O bán kính R=OA có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=\frac{a_1^2a_2^2(b_1^2-b_2^2)+b_1^2b_2^2(a_2^2-a_1^2)}{a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm M(1, 1) và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

a. CMR mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b. Lập phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt Elíp trên tại hai điểm A, B sao cho MA=MB.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\mathscr{P}_{M/(E)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}<1 \Leftrightarrow \text{M nằm trong Elíp}$$

do đó mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b. Nhận xét rằng đường thẳng (d) không thể song song với Oy, do đó giả sử (d) có hệ số góc k, ta được:

$$y=k(x-1)+1 \Leftrightarrow (d): y=kx-k+1. \qquad (1)$$

Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ y=kx-k+1\end{cases} \Rightarrow 4x^2+9(kx-k+1)^2=36$$

$$\Leftrightarrow (4+9k^2)x^2-18k(k-1)x+9k^2-18k-27=0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{18k(k-1)}{4+9k^2}\\[2mm] x_A.x_B=\dfrac{9k^2-18k-27}{4+9k^2}\end{cases}$$

Theo giả thiết MA=MB

$$\Leftrightarrow x_A+x_B=2x_M \Leftrightarrow \frac{18k(k-1)}{4+9k^2}=2 \Leftrightarrow k=-\frac{4}{9}.$$

Thay $k=-\frac{4}{9}$ vào (1), ta được phương trình đường thẳng (d): $4x+9y-13=0$.

Ví dụ 2: Cho Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0<b<a$$

Hai tiêu điểm F_1, F_2. Đường thẳng di động (d) luôn đi qua F_2 cắt (E) tại P, Q. Đặt $(Ox, F_2P)=\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$

a. Tính độ dài F_2P, F_2Q theo a, b, α.

b. CMR $\dfrac{1}{F_2P}+\dfrac{1}{F_2Q}$ không đổi.

c. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn PQ.

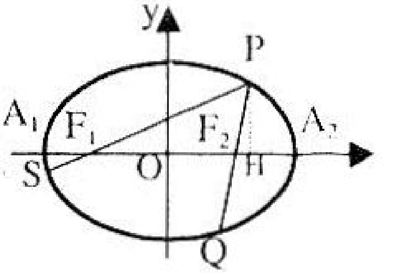
Giải

a. Giả sử $P(x_P, y_P)$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên Ox, khi đó:

$$\cos\alpha=\frac{F_2H}{F_2P}=\frac{x_P-c}{a-cx_P}=\frac{a(x_P-c)}{a^2-cx_P}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-cx_P)\cos\alpha=a(x_P-c) \Leftrightarrow x_P=\frac{a(a\cos\alpha+c)}{a+c.\cos\alpha}$$

do đó:



$$F_2P=a-\frac{c}{a}x_P=a-\frac{c}{a}.\frac{a(a\cos\alpha+c)}{a+c.\cos\alpha}$$

$$=\frac{a^2-c^2}{a+c.\cos\alpha}=\frac{b^2}{a+c.\cos\alpha}. \quad (1)$$

b. Bằng cách thay α bằng $\pi-\alpha$ vào (1), ta được :

$$F_2Q=\frac{b^2}{a+c.\cos(\pi-\alpha)}=\frac{b^2}{a-c.\cos\alpha}.$$

suy ra:

$$\frac{1}{F_2P}+\frac{1}{F_2Q}=\frac{a+c.\cos\alpha}{b^2}+\frac{a-c.\cos\alpha}{b^2}=\frac{2a}{b^2}.$$

c. Ta có:

$$PQ=F_2P+F_2Q=\frac{b^2}{a+c.\cos\alpha}+\frac{b^2}{a-c.\cos\alpha}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$$

suy ra:

- $PQ\geq\frac{2ab^2}{a^2}=\frac{2b^2}{a}$

  suy ra $\text{Min}PQ=\frac{2b^2}{a}$, đạt được khi $\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\pi/2\\ \alpha=3\pi/2\end{array}\right.$.

- $PQ\leq\frac{2ab^2}{a^2-c^2}=2a$

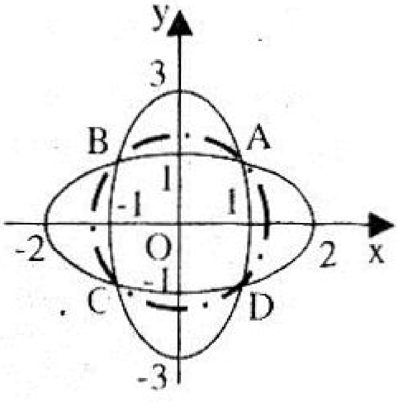
  suy ra MaxPQ=2a, đạt được khi $\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha=\pi\\ \alpha=2\pi\end{array}\right.$.

Ví dụ 3: Cho 2 Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \ (E_2): \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$$

a. CMR $(E_1)\cap(E_2)=\{A, B, C, D\}$ và ABCD là hình chữ nhật.

b. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.



Giải

a. Từ hình vẽ suy ra ngay $(E_1)\cap(E_2)=\{A, B, C, D\}$

Nhận xét rằng A, B, C, D đối xứng qua O và

AB//CD//Ox, AD//BC//Oy

$\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

b. Hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn (C) tâm O bán kính R=OA.

Toạ độ điểm $A(x_A, y_A)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 9x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 = \dfrac{32}{35} \\ y_A^2 = \dfrac{27}{35} \end{cases} \Rightarrow R^2 = x_A^2 + y_A^2 = \dfrac{59}{35}.$$

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=\frac{59}{35}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Xét vị trí tương đối của điểm M đối với Elíp (E) trong các trường hợp sau:

a. Điểm M(4, 0).

b. Điểm M(3, 3).

Bài tập 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và Elíp (E) , biết:

a. (d): $2x+y-5=0$ và (E): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

b. (d): $2x-y=0$ và (E): $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

Bài tập 3: Cho điểm $M(1, -\frac{1}{2})$ và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho:

a. M là trung điểm AB.

b. $AB=\sqrt{20}$.

Từ đó lập phương trình đường tròn đường kính AB trong mỗi trường hợp.

Bài tập 4: Cho 2 Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$$

a. CMR $(E_1) \cap (E_2)=\{A, B, C, D\}$ và ABCD là hình chữ nhật.

b. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. (d) tiếp xúc với (E) tại điểm $M(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$.

b. $(d)\cap(E)=\{M_1, M_2\}$, với $M_1(1, 2)$ và $M_1(-1, -2)$

BÀI TOÁN 4

ĐIỂM THUỘC ELÍP
QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thuộc Elíp (E) thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0)\in(E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Bước 2: Điểm $M\in(E) \Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t)$.

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm thì ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

$$F_1M=a+\frac{cx_0}{a} \text{ và } F_2M=a-\frac{cx_0}{a}.$$

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc thì ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Elíp với một đường khác thì ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên thuộc (E).

b. Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$. (1)

a. Nhận xét rằng nếu điểm $M_0(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow M_1(-x_0, y_0)$, $M_2(-x_0, -y_0)$ và $M_3(x_0, -y_0)$ cũng thuộc (E). Do vậy ta chỉ cần xác định các điểm M_0 có toạ độ nguyên dương.

Xét phương trình (1) với ẩn y_0:

$$(1) \Leftrightarrow y_0^2 = 8 - 4x_0^2.$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow 8 - 4x_0^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x_0 \leq \sqrt{2} \Rightarrow x_0 = 1 \text{ và do đó } y_0 = 2 \Rightarrow M_0(1, 2) \in (E).$$

Từ M_0 suy ra các điểm $M_1(-1, 2)$, $M_2(-1, -2)$ và $M_3(1, -2)$ cũng thuộc (E).

Vậy (E) có 4 điểm M_0, M_1, M_2, M_3 có toạ độ nguyên.

b. Ta có:

$$(x_0+y_0)^2 = \left(\sqrt{2}.\frac{x_0}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}.\frac{y_0}{\sqrt{8}}\right)^2$$

$$\leq (2+8)\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8}\right) = 10 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x_0 + y_0 \leq \sqrt{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0/\sqrt{2}}{y_0/\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \\ \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{y_0^2}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{y_0^2}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_4\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}, \dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right) \\ M_5\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}, -\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right) \end{cases}$$

Vậy:

- $(x_0+y_0)_{Max} = \sqrt{10}$, đạt được tại M_4.
- $(x_0+y_0)_{Min} = -\sqrt{10}$, đạt được tại M_5.

Ví dụ 2: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 7 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

b. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0.

c. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 90^0.

Giải

Điểm $M(x_0, y_0) \in (E)$ suy ra:

$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \quad (1)$$

$$MF_1 = a + \frac{cx_0}{a} = 2 + \frac{x_0\sqrt{3}}{2} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx_0}{a} = 2 - \frac{x_0\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

a. Từ giả thiết ta có:

$$\left[\begin{array}{l} MF_1 = 7MF_2 \\ MF_2 = 7MF_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 0=(MF_1-7MF_2)(MF_2-7MF_1)=50MF_1.MF_2 - 7(MF_1^2 + MF_2^2)$$

$$=50MF_1.MF_2 - 7[(MF_1+MF_2)^2-2MF_1.MF_2]$$

$$=50MF_1.MF_2 - 7(16-2MF_1.MF_2) =64MF_1.MF_2-112$$

$$=64(2+\frac{x_0\sqrt{3}}{2}).(2-\frac{x_0\sqrt{3}}{2})-112=64(4-\frac{3x_0^2}{4})-112=144-48x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_0=\pm\frac{1}{2}.$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài là:

$M_1(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $M_2(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $M_3(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ và $M_4(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

b. Xét ΔMF_1F_2, ta có:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 -2MF_1.MF_2.\cos 60^0$$

$$=[(MF_1+MF_2)^2-2MF_1.MF_2]-MF_1.MF_2$$

$$\Leftrightarrow 12=16-3MF_1.MF_2$$

$$\Leftrightarrow 4=3(2+\frac{x_0\sqrt{3}}{2}).(2-\frac{x_0\sqrt{3}}{2})=3(4-\frac{3x_0^2}{4}) \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_0=\pm\frac{1}{3}.$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài là:

$M_5(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$, $M_6(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$, $M_7(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ và $M_8(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét ΔMF_1F_2, ta có:

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$ - thực hiện tương tự b).

Cách 2: Vì M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông do đó M thuộc đường tròn (C) đường kính F_1F_2, do đó M là giao điểm của đường tròn (C): $x^2+y^2=3$ và (E) có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài là:

$M_9(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $M_{10}(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$,

$M_{11}(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ và $M_{12}(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Ví dụ 3: Cho Elíp (E) có phương trình:

vớ vẩn

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0<b<a.$$

a. Gọi M là một điểm tuỳ ý thuộc (E), chứng tỏ rằng $b \le OM \le a$.

b. Tìm điểm M trên (E) sao cho độ dài F_1M ngắn nhất, dài nhất.

Giải

a. Gọi $M(x_M, y_M) \in (E)$, suy ra:

$$\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1. \qquad (*)$$

Khi đó :

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = a^2\left(\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{a^2}\right) \le a^2\left(\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right) = a^2 \Rightarrow OM \le a. \qquad (1)$$

$$OM^2 = x_E^2 + y_E^2 = b^2\left(\frac{x_M^2}{b^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right) \ge b^2\left(\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}\right) = b^2 \Rightarrow OM \ge b. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta được $b \le OM \le a$.

b. Ta có:

$$F_1M^2 = (x_M+c)^2 + y_M^2 = (x_M+c)^2 + b^2\left(1-\frac{x_M^2}{a^2}\right) = (ex_M+a)^2$$

$$\Rightarrow F_1M = ex_M + a. \qquad (3)$$

Vì $-a \le x_M \le a \Rightarrow -a.e+a \le ex_M+a \le a.e+a \Leftrightarrow a-c \le F_1M \le a+c$.

Vậy:

- $F_1M_{Max}=a+c$, đạt được khi $M(a, 0) \equiv A_2$.
- $F_1M_{Min}=a-c$, đạt được khi $M(-a, 0) \equiv A_1$.

Chú ý:

1. Ta có thể có ngay kết quả (3), dựa trên tính chất:

Điểm $M(x_M, y_M) \in (E)$ luôn có:

$$F_1M = a + \frac{cx_M}{a} \quad \text{và} \quad F_2M = a - \frac{cx_M}{a}.$$

2. Cũng có thể sử dụng phương trình tham số của Elíp để đánh giá, cụ thể:

Phương trình tham số của Elíp (E) là

$$(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi).$$

Điểm $M \in (E) \Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t)$.

Khi đó:

$$F_1M = a + \frac{cx_M}{a} = a + c.\sin t$$

Vậy:

- $F_1M_{Max}=a+c$, đạt được khi $\sin t=1 \Rightarrow M(a, 0) \equiv A_2$.
- $F_1M_{Min}=a-c$, đạt được khi $\sin t=-1 \Rightarrow M(-a, 0) \equiv A_1$.

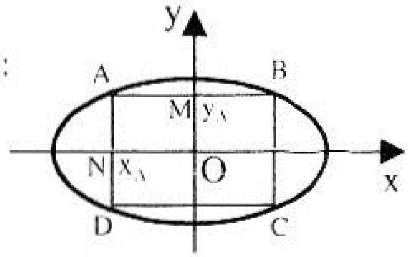
Ví dụ 4: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Từ điểm $A \in (E)$ có toạ độ dương, dựng hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong (E) có các cạnh song song với các trục toạ độ. Xác định toạ độ của A để hình chữ nhật ABCD có diện tích lớn nhất.

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:



Cách 1: Giả sử $A(x_A, y_A) \in (E)$ với $x_A, y_A > 0$, suy ra:

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1.$$

Khi đó:

$$S_{ABCD} = 4S_{OMAN} = 4x_0y_0 = 2ab.2\frac{x_A}{a}.\frac{y_A}{b} \le 2ab.\left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2}\right) = 2ab.$$

Vậy $S_{max} = 2ab$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_A}{a} = \frac{y_A}{b} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Cách 2: Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a.\sin t \\ y = b.\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Điểm $A \in (E)$ và thuộc góc phần tư thứ nhất $\Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t), t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó:

$$S_{ABCD} = 4S_{OMAN} = 4x_0y_0 = 4a.\sin t.b.\cos t = 2ab\sin 2t \le 2ab.$$

Vậy $S_{max} = 2ab$, đạt được khi: $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

Ví dụ 5: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (d): x - y\sqrt{2} + 2 = 0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (E):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - y\sqrt{2} + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right), B\left(-\sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) \text{ và } AB = 3\sqrt{2}$$

b. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Lấy $C(x_0, y_0) \in (E)$, suy ra:

$$\frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \qquad (1)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Ta được:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{3\sqrt{2}}{2}CH$$

trong đó:

$$CH = d(C, (d)) = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 12|}{5}.$$

- ΔABC có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow CH_{Max}$.

Ta có:

$$CH = \frac{|x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{\left|\sqrt{8}\frac{x_0}{\sqrt{8}} + (-2\sqrt{2})\frac{y_0}{2} + 2\right|}{\sqrt{3}}$$

$$\leq \frac{\left|\sqrt{(8+8)\left(\frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{4}\right)} + 2\right|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CH_{Max} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{Max} = 3\sqrt{6},$$

đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \\ \frac{x_0/\sqrt{8}}{y_0/2} = \frac{\sqrt{8}}{-2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow C_0(2, -\sqrt{2}).$$

Cách 2: Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Điểm $C \in (E) \Rightarrow C(2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Ta được:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{3\sqrt{2}}{2}CH.$$

- ΔABC có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow CH_{Max}$.

Ta có:

$$CH = d(C, (d)) = \frac{|2\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\cos t + 2|}{\sqrt{1+2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}|2\sin(t - \frac{\pi}{4}) + 1| \leq 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CH_{Max} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{Max} = 3\sqrt{6},$$

đạt được khi

$$\sin(t - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow C_0(2, -\sqrt{2}).$$

Ví dụ 6: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, với } 0<b<a.$$

1. Gọi A là một giao điểm của đường thẳng y=kx với (E). Tính OA theo a, b, k.
2. Gọi A, B là hai điểm tuỳ ý thuộc (E) sao cho OA⊥OB.
   a. CMR $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ không đổi, từ đó suy ra đường thẳng (AB) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
   b. Xác định k để ΔOAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

Giải

1. Toạ độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow x_A^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}\text{ và } y_A^2=\frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}.$$

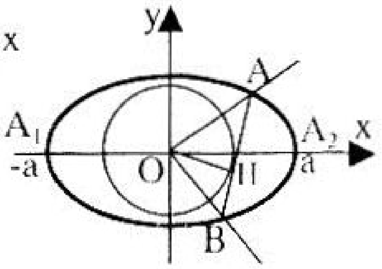
Từ đó, suy ra

$$OA^2=x_A^2+y_A^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}+\frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2k^2+b^2}$$

$$\Rightarrow OA=ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}},$$

2. Giả sử đường thẳng (OA) có phương trình y=kx

$$\Rightarrow OA=ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}}.$$



Vì OA⊥OB ⇒ (OB) có phương trình:

$$y=-\frac{1}{k}x\Rightarrow OB=ab\sqrt{\frac{1+\frac{1}{k^2}}{a^2.\frac{1}{k^2}+b^2}}=ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2+b^2k^2}}.$$

a. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2(1+k^2)}+\frac{a^2+b^2k^2}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\text{ không đổi.}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AB, khi đó:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vậy (AB) luôn tiếp xúc với đường tròn (C) tâm O bán kính R=OH có:

$$(C): x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

b. Ta có:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}}\,ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2+b^2k^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{2\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}}. \qquad (1)$$

- ΔOAB có diện tích nhỏ nhất.

Ta có:

$$\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}\le\frac{(a^2k^2+b^2)+(a^2+b^2k^2)}{2}=\frac{(a^2+b^2)(1+k^2)}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1+k^2}{\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}}\ge\frac{2}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), được

$$S_{\Delta OAB}\ge\frac{ab}{a^2+b^2}\Rightarrow S_{\min}=\frac{ab}{a^2+b^2}$$

đạt được khi $a^2k^2+b^2=a^2+b^2k^2\Leftrightarrow k=\pm1$.

- ΔOAB có diện tích lớn nhất - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 7: Cho điểm A(-5, 0) và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): 9x^2+25y^2=225.$$

Giả sử M là điểm di động trên Elíp. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. CMR khi M thay đổi trên Elíp thì P luôn chạy trên một đường cong cố định.

Giải

Lấy điểm $M(x_0, y_0)\in(E)$, ta được $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$. (1)

Hình chiếu H của M lên Oy có tọa độ $H(0, y_0)$.

Phương trình (OM) được cho bởi :

$$(OM): \begin{cases}\text{qua } M(x_0, y_0)\\ \text{qua } O(0,0)\end{cases}\Leftrightarrow (OM): \frac{x-x_0}{-x_0}=\frac{y-y_0}{-y_0}\Leftrightarrow (OM): y_0x-x_0y=0.$$

Phương trình (AH) được cho bởi :

$$(AH): \begin{cases}\text{qua } A(-5,0)\\ \text{qua } H(0, y_0)\end{cases}\Leftrightarrow (AH): \frac{x+5}{5}=\frac{y}{y_0}\Leftrightarrow (AH): y_0x-5y+5y_0=0.$$

Giả sử AH cắt OM tại P, khi đó toạ độ của P là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}y_0x-x_0y=0\\ y_0x-5y+5y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow x_0=\frac{5x}{x+5} \text{ và } y_0=\frac{5y}{x+5} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$9\left(\frac{5x}{x+5}\right)^2+25\left(\frac{5y}{x+5}\right)^2=225\Leftrightarrow y^2=\frac{18}{5}x+9.$$

Vậy P luôn chạy trên một đường cong cố định (P): $y^2=\frac{18}{5}x+9$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): 4x^2+9y^2=36.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên.

b. Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

c. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

Bài tập 2: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên.

b. Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

c. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

d. $\frac{MF_1}{MF_2}=\frac{3}{5}$.

Bài tập 3: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

BBiểm M thuộc Elíp (E) nhìn hai tiêu điểm F_1F_2 dưới một góc 2α. Biết:

a. CMR $tg\alpha\le\frac{c}{b}$ với a>b>0, từ đó tính tung độ điểm M theo a, b, α.

b. CMR $tg\alpha\le\frac{c}{a}$ với b>a>0, từ đó tính hoành độ điểm M theo a, b, α.

Bài tập 4: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

a. Tìm điểm M trên (E) sao cho độ dài F_1M ngắn nhất, dài nhất.

b. Từ điểm $A\in(E)$ có toạ độ dương, dựng hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong (E) có các cạnh song song với các trục toạ độ. Xác định toạ độ của A để hình chữ nhật ABCD có diện tích lớn nhất.

c. A, B là hai điểm tuỳ ý thuộc (E) sao cho $OA\perp OB$, hãy xác định vị trí của A và B trên (E) để ΔOAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

Bài tập 5: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ và } (d): 3x+4y-12=0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (E) sao cho :

- ΔABC có diện tích bằng 6.
- ΔABC có diện tích lớn nhất.
- ΔABC vuông.

Bài tập 6: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } 0<b<a.$$

Cho ΔABC đều nội tiếp trong (E), với A là một đỉnh trên trục lớn của Elíp (E). Tìm toạ độ các đỉnh B, C.

Áp dụng với (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ và A(3, 0).

Bài tập 7: Cho điểm A(-2, 0) và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Giả sử M là điểm di động trên Elíp. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. CMR khi M thay đổi trên Elíp thì P luôn chạy trên một đường cong cố định.

Bài tập 8: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } 0<b<a.$$

F_1, F_2 là các tiêu điểm, A_1, A_2 là các đỉnh thuộc trục lớn của (E). Đường thẳng x=m (-a<m<a, m≠0) cắt (E) tại hai điểm M, N.

a. Gọi $E=A_1M \cap A_2N$, lập phương trình quỹ tích các điểm E khi m thay đổi.

b. Gọi $P=F_1M \cap F_2N$ và $Q=F_2M \cap F_1N$, lập phương trình quỹ tích các điểm P, Q khi m thay đổi.

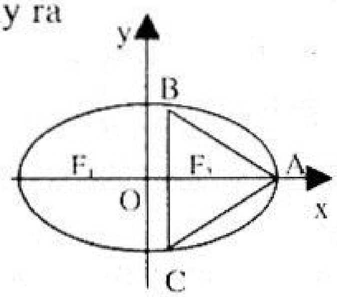
IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 6: Giả sử A(a, 0), ta có:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB=BC=CA \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases}.$$

Từ điều kiện AB=AC, do tính đối xứng của (E), suy ra

$$B, C \text{ đối xứng qua } Ox \Leftrightarrow \begin{cases} B(x_0, y_0),\ y_0 > 0 \\ C(x_0, -y_0) \end{cases}$$



Vậy tóm lại điều kiện là:

$$\begin{cases} B \in (E) \\ d(A, BC) = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ a - x_0 = \sqrt{3}y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{a(a^2+3b^2)}{a^2-3b^2} \\ y_0 = \dfrac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2-3b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\left(\dfrac{a(a^2+3b^2)}{a^2-3b^2}, \dfrac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2-3b^2}\right) \\ C\left(\dfrac{a(a^2+3b^2)}{a^2-3b^2}, -\dfrac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2-3b^2}\right) \end{cases}.$$

Áp dụng ta được B(0, $\sqrt{3}$) và C(0, - $\sqrt{3}$).

CHỦ ĐỀ 6

HYPECBÔN

1. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm cố định F_1, F_2, với $F_1F_2=2c>0$.

Tập hợp những điểm M sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$ *(a là một số không đổi và* $a<c$*) gọi là một Hypecbôn.*

Vậy:

$$(H)=\{M|\ MF_1+MF_2=2a\}$$

- Hai điểm F_1, F_2 gọi là hai *tiêu điểm* của Hypecbôn.
- Khoảng cách $F_1F_2=2c$ gọi là *tiêu cự* của Hypecbôn.
- Trung điểm I của F_1F_2 gọi là *tâm* của Hypecbôn.
- Với điểm M thuộc Hypecbôn thì các khoảng cách MF_1 và MF_2 gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA HYPECBÔN

Trong mặt phẳng Oxy, Hypecbôn (H) có hai tiêu điểm $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ và có tổng hai bán kính qua tiêu ứng với điểm tuỳ ý $M(x, y)\in(H)$ là 2a (a> có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } b^2=c^2-a^2.$$

Chú ý: Điểm $M(x, y)\in(H)$ luôn có:

a. $F_1M=\frac{cx}{a}+a$ và $F_2M=\frac{cx}{a}-a$ với $x>0$.

b. $F_1M=-\frac{cx}{a}-a$ và $F_2M=-\frac{cx}{a}+a$ với $x<0$.

3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA HYPECBÔN

Hypecbôn (H) có phương trình chính tắc:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

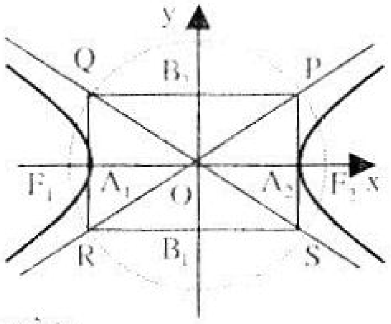
được chuyển về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{1}{\cos t} \\ \frac{y}{b}=\text{tg}t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$$

$$\Leftrightarrow (H): \begin{cases} x=\frac{a}{\cos t} \\ y=b\text{tg}t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Phương trình trên được gọi là phương trình tham số dạng lượng giác của Hypecbôn (H).

4. HÌNH DẠNG CỦA HYPECBÔN



Với Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta xét các tính chất hình học của (H) bằng cách xét các tính chất đại số tương ứng của phương trình trên.

a. Phương trình của (H) có bậc chẵn đối với x và y nên:

- Nếu điểm $M(x, y) \in (H)$ thì các điểm $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ và $M_3(x, -y)$ cũng thuộc (H).
- (H) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc O làm *tâm đối xứng*.

b. (H) cắt các trục toạ độ tại hai điểm:

- $(H) \cap Ox = \{A_1, A_2\}$ có toạ độ là $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ và đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trục thực* của (H) có độ dài bằng 2a.
- (H) không cắt Oy, đặt $B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$ và đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục ảo* của (H) có độ dài bằng 2b.
- Vậy trục thực của Hypecbôn là trục đối xứng cắt Hypecbôn, trục ảo là trục đối xứng không cắt Hypecbôn.
- Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là bốn đỉnh của Hypecbôn (H)

Lưu ý: Hai tiêu điểm của Hypecbôn (H) luôn ở trên trục thực.

c. *Hình chữ nhật cơ sở:* hình chữ nhật có các đỉnh là giao điểm của các đường thẳng $x = \pm a$ và các đường thẳng $y = \pm b$ được gọi là hình chữ nhật cơ sở của (H).

d. Từ $M(x, y) \in (H)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right..$$

Như vậy Hypecbôn (H) là tập hợp của hai tập con không giao nhau.

- Tập con của (H) chứa những điểm M(x, y) thoả mãn $x \geq a$ gọi là *nhánh bên phải* của Hypecbôn.
- Tập con của (H) chứa những điểm M(x, y) thoả mãn $x \leq -a$ gọi là *nhánh bên trái* của Hypecbôn.
- Hai nhánh này đối xứng nhau qua trục ảo và cả hai đều nhận trục thực làm trục đối xứng.

e. Hypecbôn (H) có 2 đường tiệm cận là: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

f. Cách dựng Hypecbôn (H)

- Xác định vị trí các điểm $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ trên hệ toạ độ.
- Dựng các đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$ cắt nhau tại P, Q, R, S.

- Hình chữa nhật PQRS có kích thước 2a, 2b gọi là *hình chữ nhật cơ sở* của Hypecbôn.
- Kẻ hai đường tiệm cận là hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.
- Dựa trên hai đỉnh A_1, A_2 và hai đường tiệm cận để vẽ Hypecbôn.

4.1. Hypecbôn liên hợp

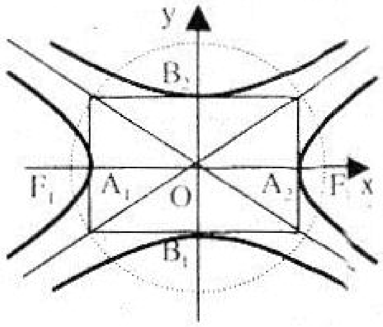
Định nghĩa 3. Hai Hypecbôn có phương trình:

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } (H_2): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

gọi là hai Hypecbôn liên hợp.

Chú ý: Hai Hypecbôn liên hợp:

- Có chung các đường tiệm cận và hình chữ nhật cơ sở.
- Có các tiêu điểm và đỉnh khác nhau.



Trục thực của Hypecbôn này là trục ảo của Hypecbôn kia và ngược lại.

5. TÂM SAI CỦA HYPECBÔN

Tâm sai của Hypecbôn là số thực e bằng tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của Hypecbôn.

- Đối với Hypecbôn (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì $e = \frac{c}{a}$.
- Đối với Hypecbôn (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ thì $e = \frac{c}{b}$.

Chú ý: Mọi Hypecbôn đều có tâm sai lớn hơn 1.

BÀI TOÁN 1

XÁC ĐỊNH CÁC THUỘC TÍNH CỦA HYPECBÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định các thuộc tính của Hypecbôn (H).

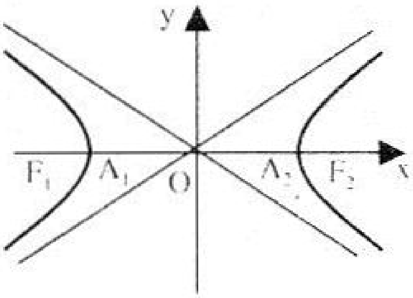
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Hypecbôn (H) về dạng chính tắc

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Bước 2: Xét các khả năng:



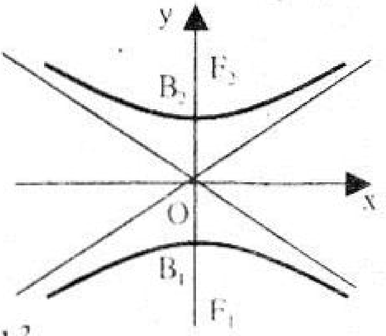
Khả năng 1: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta được:

- (H) có trục thực thuộc Ox, độ dài bằng 2a chứa hai tiêu điểm

  $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ với $c^2=a^2+b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Oy với độ dài bằng 2b.
- Tâm sai $e=\frac{c}{a}$.



Khả năng 2: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ta được:

- (H) có trục thực thuộc Oy, độ dài bằng 2b chứa hai tiêu điểm

  $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ với $c^2=a^2+b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Ox với độ dài bằng 2a.
- Tâm sai $e=\frac{c}{b}$.

Chú ý: Trong trường hợp phương trình của (H) có dạng:

$$(H): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = \pm 1$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(H): \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (H) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (H) trong hệ trục Oxy.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

a. Chuyển phương trình của (H) về dạng chính tắc. Tìm toạ độ các đỉnh, toạ độ các tiêu điểm, tính tâm sai, các đường tiệm cận của (H) và xác định phương trình tham số của (H).

b. Viết phương trình Hypecbôn (H_1) liên hợp của (H). Tìm các thuộc tính của (H_1) và xác định phương trình tham số của (H_1).

c. Viết phương trình chính tắc và phương trình tham số của Elíp (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Giải

a. Đưa phương trình Hypecbôn về dạng

$$(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a=4,\ b=3 \text{ và } c=5.$$

Từ đó:

- Tâm O(0, 0).
- Toạ độ các đỉnh $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$.
- Toạ độ các tiêu điểm $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.
- Tâm sai $e=\frac{5}{4}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận là $y=\pm\frac{3}{4}x$.
- Phương trình tham số của (H) có dạng:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{4}{\cos t} \\ y = 3\text{tg}t \end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

b. Phương trình Hypecbôn (H_1) liên hợp của (H, có dạng:

$$(H_1): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$$

Các thuộc tính của (H_1) và phương trình tham số của (H_1) bạn đọc tự làm

c. Giả sử phương trình chính tắc của Elíp có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \text{với } a>b. \quad (1)$$

- Tiêu cự $c=5 \Leftrightarrow a^2-b^2=5^2$ (2)

- P(4, 3) là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H). Để Elíp (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H)

$$\Leftrightarrow P(4,3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2+16b^2-a^2.b^2=0 \qquad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $a^2=40$, $b^2=15$.

Vậy phương trình chính tắc (E) có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1,$$

và phương trình tham số có dạng:

$$(E): \begin{cases} x = 2\sqrt{10}\sin t \\ y = \sqrt{15}\cos t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi).$$

Ví dụ 2: Xét điểm M(t) có toạ độ cho bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = \sqrt{3}\text{tgt} \end{cases}, \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

a. CMR khi t thay đổi, điểm M(t) vạch trên một nhánh của Hypecbôn (H). Xác định toạ độ tiêu điểm của Hypecbôn đó.

b. Chứng minh điều kiện cần và đủ để đường thẳng nối 2 điểm phân biệt $M(t_1)$, $M(t_2)$ đi qua một tiêu điểm của (H) là $\text{tg}\frac{t_1}{2}.\text{tg}\frac{t_2}{2}=-\frac{1}{3}$.

Giải

a. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos t} = 1 \\ \text{tgt} = \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 t} - \text{tg}^2 t = 1} \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1 \quad (*) \end{cases}.$$

Vậy M(t) thuộc nhánh bên phải của Hypecbôn (H) có phương trình cho bởi (*) và có hai tiêu điểm $F_1(-2, 0)$ và $F_2(2,0)$.

b. Bằng cách đặt $u=\text{tg}\frac{t_1}{2}$ và $v=\text{tg}\frac{t_2}{2}$ ($u \neq v$ vì $t_1 \neq t_2$), khi đó:

- Toạ độ hai điểm $M(t_1)$ và $M(t_2)$ được viết lại dưới dạng:

$$M(t_1): \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\cos t_1} = \dfrac{1+u^2}{1-u^2} \\ y_1 = \sqrt{3}\text{tg}t_1 = \dfrac{2u\sqrt{3}}{1-u^2} \end{cases} \text{ và } M(t_2): \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\cos t_2} = \dfrac{1+v^2}{1-v^2} \\ y_2 = \sqrt{3}\text{tg}t_2 = \dfrac{2v\sqrt{3}}{1-v^2} \end{cases}.$$

- Với điều kiện $M(t_1)$, $M(t_2)$ và tiêu điểm F_2 thẳng hàng, ta được:

$$\frac{x_{F_2}-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_{F_2}-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \frac{2-\dfrac{1+u^2}{1-u^2}}{\dfrac{1+v^2}{1-v^2}-\dfrac{1+u^2}{1-u^2}} = \frac{-\dfrac{2u\sqrt{3}}{1-u^2}}{\dfrac{2v\sqrt{3}}{1-v^2}-\dfrac{2u\sqrt{3}}{1-u^2}}$$

$$\Leftrightarrow uv = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg}\frac{t_1}{2}.\text{tg}\frac{t_2}{2} = -\frac{1}{3}, \text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chuyển phương trình các Hypecbôn sau về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình, biết:

a. (H): $9x^2 - 4y^2 = 36$. b. (H): $x^2 - 4y^2 = -1$.

Trong các trường hợp xác định phương trình tham số của (H).

Bài tập 2: Vẽ các đường cong sau:

a. (H): $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2+6}$ b. (H): $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$.

c. (H): $\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos t} \\ y = 2\operatorname{tg} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi) \backslash \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

Bài tập 3: Cho Hypecbôn (H): $x^2 - 2y^2 = 6$.

a. Chuyển phương trình của (H) về dạng chính tắc. Tìm toạ độ các đỉnh, toạ độ các tiêu điểm, tính tâm sai, các đường tiệm cận của (H) và xác định phương trình tham số của (H).

b. Viết phương trình Hypecbôn (H_1) liên hợp của (H). Tìm các thuộc tính của (H_1) và xác định phương trình tham số của (H_1).

c. Lập phương trình tham số của đường tròn (C) đường kính F_1F_2 và tìm giao điểm của (C) với (H).

d. Viết phương trình chính tắc và phương trình tham số của Elíp (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Bài tập 4: Cho họ đường cong có phương trình:

$$(H_m): 2mx^2 + y^2 - 4m^2x - 2(m-1)y + 2m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0.$$

a. Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình của một Hypecbôn.

b. Tìm quĩ tích tâm của họ Hypecbôn (H_m).

c. Tìm quĩ tích các đỉnh của họ Hypecbôn (H_m).

Bài tập 5: Cho họ đường cong có phương trình:

$$(H_m): y^2 = 2x + \frac{x^2}{m} \text{ với } 0<m<1.$$

a. Đưa phương trình về dạng chính tắc, xác định toạ độ tâm, tiêu điểm F_1, F_2 và các đỉnh A_1, A_2 của Hypecbôn.

b. Tìm quĩ tích các đỉnh A_1, A_2 của Hypecbôn (H) khi m thay đổi.

c. Tìm quĩ tích các tiêu điểm F_1, F_2 của Hypecbôn (H) khi m thay đổi.

Bài tập 6: Tính tâm sai của Hypecbôn, biết :

a. Hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

b. Góc giữa hai tiệm cận bằng α ($0<\alpha\leq 90^0$).

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4:

a. Tâm I_m của họ (H_m) thuộc phần đường thẳng (d): $x-y+2=0$ lấy với $x<0$.

b. Ta có:

- Đỉnh A_1 của họ (H_m) thuộc phần đường thẳng (d_1): $(1+\sqrt{2})x - y - 1 = 0$ lấy với $x<0$.
- Đỉnh A_2 của họ (H_m) thuộc phần đường thẳng (d_2): $(1-\sqrt{2})x - y - 1 = 0$ lấy với $x<0$.

BÀI TOÁN 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH HYPECBÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Lập phương trình của Hypecbôn (H).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Hypecbôn

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

Từ đó tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa – *Được minh hoạ trong ví dụ 4*

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Hypecbôn hoặc chứng minh tập hợp điểm là Hypecbôn, trong trường hợp này ta thường thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh tập hợp điểm là Hypecbôn (H) bằng việc chỉ ra hai điểm cố định A, B và M thoả mãn $|MA - MB| = 2a$ - không đổi.

Bước 2: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn (H) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục thực bằng 2a.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của Hypecbôn (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với (E) có phương trình:

$$(E):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Giải

Hypecbôn (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với (E) có phương trình :

$$(H):\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

và khi đó phương trình tham số của (H) có dạng:

$$(H):\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{\cos t} \\ y=2\operatorname{tg}t \end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\}.$$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ và $A(2, 0)$.

a. Lập phương trình Hypecbôn (H) đi qua A và có tiêu điểm F_1, F_2.

b. Tìm toạ độ điểm M trên (H) sao cho $MF_2=2MF_1$.

Giải

a. Vì hai tiêu điểm F_1 và F_2 thuộc Ox và đối xứng qua Oy nên Hypecbôn (H) có dạng:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

- Tiêu cự $c=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=4^2$ (2)
- Điểm $A(2, 0)\in(H) \Leftrightarrow a^2=4$ (3)
- Từ (2), (3) suy ra $a^2=4$, $b^2=12$.

Vậy phương trình (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

b. Giả sử $M(x_0, y_0)\in(H)$ sao cho $MF_2=2MF_1$, ta có:

$$|MF_1-MF_2|=2a \Rightarrow MF_1=2a \Leftrightarrow MF_1^2=4a^2$$

$$\Leftrightarrow [(-4-x_0)^2+y_0^2]=4.16 \Leftrightarrow [(4+x_0)^2+y_0^2]=64 \qquad (4)$$

Mặt khác $M(x_0, y_0)\in(H)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{12}=1 \qquad (5)$$

Giải hệ tạo bởi (4), (5), ta được $M_1(-3, -\sqrt{15})$, $M_2(-3, \sqrt{15})$.

Ví dụ 3: Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của Hypecbôn (H) đi qua điểm M(5, 4) và mỗi đường tiệm cận tạo với trục hoành một góc 45^0.

Giải

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

- Điểm $M(2, 3)\in(H) \Leftrightarrow 25b^2-16a^2=a^2.b^2$ (2)
- Tiệm cận của (H) tạo với trục hoành một góc 45^0

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}=tg45^0 \Leftrightarrow a=b \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được a=b=3.

Vậy phương trình chính tắc của Hypecbôn (H)

$$(H):\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1,$$

và khi đó phương trình tham số của (H) có dạng:

$$(H): \begin{cases} x = 3tgt \\ y = \dfrac{3}{\cos t} \end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Trường hợp 2: Với Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \textit{giải tương tự.}$$

Chú ý: Bằng cách lập luận có thể khẳng định Hypecbôn (H) chỉ có thể là dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Ví dụ 4: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn, biết hai tiêu điểm $F_1(-1, -1)$, $F_2(3, 3)$ và độ dài trục thực bằng 8.

Giải

Lấy điểm $M(x, y)\in(H)$, ta có :

$$|MF_1-MF_2|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1M-F_2M=8 \\ F_1M-F_2M=-8 \end{array}\right. \qquad (1)$$

trong đó :

$$MF_1^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \qquad (2)$$

$$MF_2^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \qquad (3)$$

- Với $MF_1-MF_2=8$ (4)

Suy ra

$$MF_1+MF_2=\frac{MF_1^2-MF_2^2}{MF_1-MF_2}=\frac{8x+8y-16}{8}=x+y-2 \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được $F_1M=\frac{1}{2}(x+y+6)$ (6)

- Với $MF_1-MF_2=-8$ (7)

Suy ra

$$MF_1+MF_2=\frac{MF_1^2-MF_2^2}{MF_1-MF_2}=\frac{8x+8y-16}{-8}=-x-y+2 \qquad (8)$$

Từ (7) và (8) ta được $F_1M=\frac{1}{2}(-x-y-6)$ (9)

Vậy $M(x, y)\in(H)$ được $F_1M=\frac{1}{2}|x+y+6|$ (10)

Thay (10) vào (2) ta được:

$$\frac{1}{2}(x+y+6)^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-2xy-4x-4y-28=0.$$

Đó là phương trình của (H).

Ví dụ 5: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=1.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M cắt Ox tại N. Trên đường thẳng vuông góc với Ox tại N lấy điểm P sao cho PN=2MN. Lập phương trình quỹ tích các điểm P khi M di động trên (C).

Giải

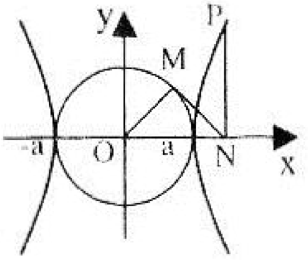
Giả sử $P(x, y)$, ta có:

$N(x, 0)$, $PN^2=y^2$ và $MN^2=ON^2-OM^2=x^2-1$.

Khi đó:

$PN=2MN \Leftrightarrow PN^2=4MN^2 \Leftrightarrow y^2=4(x^2-1)$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{4}=1.$



Vậy quỹ tích các điểm M thuộc Hypecbôn

(H): $x^2-\frac{y^2}{4}=1.$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn biết:

a. Trục thực thuộc Ox, có độ dài bằng 10, trục ảo thuộc Oy, có độ dài bằng 8.

b. Độ dài trục thực bằng 8, tâm sai $e=\frac{5}{4}$.

c. Có các tiêu điểm trên Ox, độ dài tiêu cự là 20 và một đường tiệm cận có phương trình là $4x+3y=0$.

d. Có các tiêu điểm trên Oy, độ dài trục thực bằng 8 và hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

Bài tập 2: Lập phương trình chính tắc và vẽ hình của Hypecbôn biết:

a. Đi qua điểm $M(2, 2)$ và mỗi đường tiệm cận tạo với Ox một góc 60^0.

b. Đi qua điểm $N(\sqrt{2}, 2)$ và hai đường tiệm cận có phương trình $y=\pm 2x$.

c. Hai trục trùng với trục toạ độ và đi qua 2 điểm $A(\sqrt{6}, -1)$ và $B(4, \sqrt{6})$.

Bài tập 3: Cho hai điểm $F_1(-5, 2)$, $F_2(3, 2)$.

a. Viết phương trình Hypecbôn (H) có tâm sai $e=2$ và nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm.

b. Tìm trên (H) bốn điểm sao cho chúng là các đỉnh của một hình bình hành có một cạnh đi qua gốc toạ độ và có một đường trung bình thuộc đường thẳng (d): $y=3x+5$.

Bài tập 4: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn biết:

a. Hai tiêu điểm $F_1(-2, 2)$, $F_2(4, -4)$ và độ dài trục thực bằng 6.

b. Hai tiêu điểm $F_1(-2, 0)$, $F_2(0, 3)$ và đi qua gốc toạ độ.

Bài tập 5: Cho điểm $A(a, 0)$ và đường thẳng (Δ): $2x-a=0$ với $a>0$. Lập phương trình quỹ tích các điểm M thoả mãn $MA=\sqrt{2}\, d(M, (\Delta))$.

Bài tập 6: Cho hai điểm $A(-a, 0)$ và $B(a, 0)$ với $a>0$.

a. Lập phương trình quỹ tích các điểm M thoả mãn $OM^2=MA.MB$.

b. Lập phương trình quỹ tích các điểm N sao cho các đường thẳng AN và BN có tích hệ số góc bằng k^2.

c. (C) là đường tròn thay đổi luôn đi qua A, B. E_1E_2 là một đường kính của (C) cùng phương với Ox. Lập phương trình quỹ tích các điểm E_1, E_2.

Bài tập 7: Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của Hypecbôn (H) có một đỉnh trên trục thực là $A(1, -1)$ và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H) có phương trình:

(C): $x^2+y^2-2x-2y-7=0$.

Bài tập 8: Cho điểm $A(4, 0)$ và đường tròn (C) có phương trình:

(C): $(x+4)^2+y^2=16$.

Lập phương trình quỹ tích các tâm K của đường tròn (C_1) luôn đi qua A và tiếp xúc với (C).

Bài tập 9: Cho ba điểm $A(0, -b)$, $B(0, 3b)$ và $I(0, b)$.

a. Lập phương trình quỹ tích các điểm M thoả mãn $IM^2=MA.MB$.

b. Lập phương trình quỹ tích các điểm N sao cho các đường thẳng AN và BN có tích hệ số góc bằng k^2.

c. (C) là đường tròn thay đổi luôn đi qua A, B. E_1E_2 là một đường kính của (C) cùng phương với Oy. Lập phương trình quỹ tích các điểm E_1, E_2.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. (H): $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

b. (H_1): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ và (H_2): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$.

c. (H): $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Bài tập 3:

a. (H): $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$.

b. $A(\frac{9+\sqrt{3}}{6},\frac{9+\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{9-\sqrt{3}}{6},\frac{9-\sqrt{3}}{2})$,

$C(\frac{-21-\sqrt{3}}{6},\frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ và $D(\frac{-21+\sqrt{3}}{6},\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$.

Bài tập 5: (H): $x^2-y^2=\frac{a^2}{2}$.

Bài tập 6:

a. (H_1): $x^2-y^2=\frac{a^2}{2}$.

b. (H_2): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k^2b^2}=1$.

c. (H_3): $x^2-y^2=a^2$.

BÀI TOÁN 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ HYPECBÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng với Hypecbôn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (H) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (H).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d) và Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(d): x+y-3=0 \text{ và } (H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Chứng tỏ rằng (d) cắt (H) tại hai điểm phân biệt và xác định toạ độ các giao điểm.

Giải

Xét hệ phương trình tạo bởi (H) và (d)

$$\begin{cases}16x^2-9y^2=144\\ x+y-3=0\end{cases} \Rightarrow 7x^2+54x-225=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-\frac{75}{7}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M_1(3, 0), M_2(-\frac{75}{7}, \frac{96}{7}).$$

Vậy $(d)\cap(H)=\{M_1, M_2\}$.

Chú ý: Chúng ta cũng có thể sử dụng phương trình tham số của Hypecbôn (H) để thực hiện, cụ thể:

Chuyển phương trình (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases}x=\frac{3}{\cos t}\\ y=4\text{tg}t\end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}. \quad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$4\sin t-3\cos t=-3 \Leftrightarrow 3\cos t=4\sin t+3 \xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin t=-\frac{24}{25}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M_1(3, 0) \text{ và } M_2(-\frac{75}{7}, \frac{96}{7}).$$

Vậy $(d)\cap(H)=\{M_1, M_2\}$.

Ví dụ 2: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Gọi (d) là đường thẳng qua O có hệ số góc k, (d') là đường thẳng qua O và vuông góc với (d).

a. Tìm điều kiện đối với k để (d) và (d') đều cắt (H).

b. Tính theo k diện tích hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của (d), (d') và (H).

c. Xác định k để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

Giải

a. Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) qua O có hệ số góc k có dạng: $y=kx$.
- Đường thẳng (d') qua O và vuông góc với (d) có dạng: $y=-\frac{1}{k}x$.

Toạ độ giao điểm A, C của (d) và (H) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow (9-4k^2)x^2=36 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $9-4k^2>0 \Leftrightarrow |k|<\frac{3}{2}$ (2)

Khi đó:

$$x_A^2=\frac{36}{9-4k^2} \text{ và } y_A^2=\frac{36k^2}{9-4k^2}.$$

Toạ độ giao điểm B, D của (d') và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\ y=-\frac{1}{k}x\end{cases}\Rightarrow (9k^2-4)y^2=36 \qquad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khi:

$$9-4k^2>0 \Leftrightarrow |k|>\frac{2}{3} \qquad (4)$$

Khi đó:

$$x_B^2=\frac{36k^2}{9k^2-4} \text{ và } y_B^2=\frac{36}{9k^2-4}.$$

Kết hợp (2) và (4), ta được:

$$\frac{2}{3}<|k|<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{3}{2}<k<-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}<k<\frac{3}{2}\end{array}\right. . \qquad (I)$$

b. Nhận xét:

- A, C là giao điểm của (d) và (H) $\Rightarrow$ A, C đối xứng qua O.
- B, D là giao điểm của (d) và (H) $\Rightarrow$ B, D đối xứng qua O.
- Ngoài ra $AC\perp BD$.

Vậy ABCD là hình thoi.

Ta có:

$$S_{ABCD}=4S_{\Delta AOB}=4.\frac{1}{2}.OA.OB=2\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}$$

$$=2.\sqrt{\frac{36}{9-4k^2}+\frac{36k^2}{9-4k^2}}\sqrt{\frac{36k^2}{9k^2-4}+\frac{36}{9k^2-4}}$$

$$=\frac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$$

c. Hình thoi ABCD có diện tích nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \frac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}} \text{ nhỏ nhất.}$$

Ta có:

$$\frac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}\geq\frac{72(1+k^2)}{\frac{1}{2}[(9-4k^2)+(9k^2-4)]}=\frac{144}{5}.$$

Vậy, hình thoi ABCD có diện tích nhỏ nhất bằng $\frac{144}{5}$ đạt được khi:

$$9-4k^2=9k^2-4 \Leftrightarrow k=\pm1.$$

Ví dụ 3: Cho điểm M(0, 2) và Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) qua M cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Giải

Nhận xét rằng (d) qua M cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B không thể song song với Oy do đó:

(d): $y=kx+2$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (H)

$$\begin{cases}x^2-4y^2=4\\ y=kx+2\end{cases}\Rightarrow (4k^2-1)x^2+16kx+20=0. \qquad (1)$$

Để $(d)\cap(H)=\{A, B\}$ $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)}>0 \Leftrightarrow 20-36k^2>0 \Leftrightarrow |k|<\frac{\sqrt{20}}{6}. \qquad (2)$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ của A, B và thoả mãn:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{16k}{4k^2-1}\\ x_1.x_2=\frac{20}{4k^2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(x_1,kx_1+2)\Rightarrow\overrightarrow{MA}(x_1,kx_1)\\ B(x_2,kx_2+2)\Rightarrow\overrightarrow{MB}(x_2,kx_2)\end{cases}.$$

Từ điều kiện

$$3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{3}x_2,$$

khi đó ta được:

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x_2 + x_2 = -\frac{16k}{4k^2-1} \\ \frac{5}{3}x_2.x_2 = \frac{20}{4k^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{6k}{4k^2-1} \\ x_2^2 = \frac{12}{4k^2-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{36k^2}{(4k^2-1)^2} = \frac{12}{4k^2-1}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (d_1): y = x + 2 \\ (d_2): y = -x + 2 \end{array}\right.$$

Vậy tồn tại 2 đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện.

Ví.dụ 4: Cho Elíp (E) và Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Lập phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai Hypecbôn.

Giải

Ta có $(E)\cap(H)=\{A,B,C,D\}$ đối xứng với nhau qua O (bởi (E) và (H) đều nhận O làm tâm đối xứng).

Vậy đường tròn đi qua A, B, C, D nhận O làm tâm và bán kính

$$R^2 = OA^2 = x_A^2 + y_A^2.$$

Toạ độ điểm $A(x_A, y_A)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 4x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 = \frac{9}{5} \\ y_A^2 = \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow R^2 = x_A^2 + y_A^2 = 5.$$

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có dạng:

(C): $x^2+y^2=5$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho điểm M(0, 2) và Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) qua M cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

Bài tập 2: Cho Hypecbôn (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \text{ và } (d): 2x - y + m = 0.$$

a. CMR $(H)\cap(d)=\{A, B\}$ với A, B thuộc hai nhánh khác nhau của (H), giả sử $x_A<x_B$.

b. Tìm m sao cho $2F_1A=F_2B$.

Bài tập 3: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a. Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn (H) có hai tiêu điểm trùng với hai tiêu điểm của (E) và có tâm sai bằng 2. Từ đó suy ra phương trình Hypecbôn (H_1) liên hợp với (H).

b. Lập phương trình đường tròn (C) tâm O sao cho (C) cắt (H_1) tại những điểm cùng nhìn hai tiêu điểm của (H_1) dưới một góc 60^0.

Bài tập 4: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

và điểm A có $x_A = -\frac{3}{2}$ và $y_A > 0$ thuộc (E).

a. Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn (H) có 1 tiêu điểm $F_1(-1, -2)$, tâm I(1, -2) và đi qua A.

b. Xác định toạ độ các giao điểm của (H) và (E).

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: (d): $y=2$.

Bài tập 2:

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (H) và (d) là:

$$\begin{cases} 8x^2 - y^2 = 8 \\ 2x - y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-4mx-m^2-8=0 \qquad (1)$$

ta có

$c.a=-4(m^2+8)<0 \Leftrightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Vậy $(d)\cap(H)=\{A, B\}$ thuộc hai nhánh khác nhau của (H).

b. $m=\frac{-6 \pm 16\sqrt{2}}{21}$.

BÀI TOÁN 4
ĐIỂM THUỘC HYPECBÔN
QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thuộc Hypecbôn (H) thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$ suy ra

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Hypecbôn về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\text{tg}t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \backslash \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \}.$$

Bước 2: Điểm $M \in (H) \Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t)$.

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm thì ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

   Điểm $M(x, y) \in (H)$ luôn có:

   a. $F_1M = \frac{cx}{a} + a$ và $F_2M = \frac{cx}{a} - a$ với $x > 0$.

   b. $F_1M = -\frac{cx}{a} - a$ và $F_2M = -\frac{cx}{a} + a$ với $x < 0$.

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc thì ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.

3. Nếu điểm phải tìm là giao của Hypecbôn với một đường khác thì ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Tìm điểm M trên (H) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên.

b. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 90^0.

Giải

a. Ta chỉ cần tìm các cặp (x, y) nguyên không âm, khi đó các nghiệm còn lại là (x, -y), (-x, y), (-x, -y). Ta có:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x, y \in Z^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 4y)(3x - 4y) = 144 \\ x, y \in Z^+ \\ 3x + 4y \geq 3x - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm trên (H) có toạ độ nguyên là $M_1(-4, 0)$, $M_2(4, 0)$.

b. $MF_1 \perp MF_2 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C) đường kính $F_1F_2=10$ có phương trình:

(C): $x^2+y^2=25$.

Vậy toạ độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

ta được bốn điểm:

$$M_1(\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}), M_2(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}), M_3(\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}), M_4(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}).$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng điều kiện $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$

Ví dụ 2: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tìm điểm M trên (H) sao cho độ dài F_1M (tiêu điểm $F_1(-c, 0)$) ngắn nhất, dài nhất.

Giải

Lấy $M(x_0, y_0) \in (H)$, suy ra:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = a^2(1 + \frac{y_0^2}{b^2}) \geq a^2 \Rightarrow |x_0| \geq a.$$

Ta có:

$$F_1M = |\frac{cx_0}{a} + a| \geq |-\frac{ca}{a} + a| = |-c + a| = c - a.$$

Vậy, $F_1M_{Min} = c - a$, đạt được khi $M \equiv A_1(-a, 0)$.

Ví dụ 3: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Cho A(3, 0) và ΔABC đều nội tiếp trong (H). Tìm toạ độ các đỉnh B, C.

Giải

Ta có:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB=BC=CA \Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AB=BC \end{cases}.$$

Từ điều kiện AB=AC, do tính đối xứng của (H), suy ra

$$B, C \text{ đối xứng qua } Ox \Leftrightarrow \begin{cases} B(x_0, y_0),\ y_0>0 \\ C(x_0, -y_0) \end{cases}$$

Vậy tóm lại điều kiện là:

$$\begin{cases} B\in(H) \\ d(A,BC)=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{9}-\dfrac{y_0^2}{9}=1 \\ |3-x_0|=y_0\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=3\,(\text{loại}) \\ x_0=-6 \end{array}\right. \\ |3-x_0|=y_0\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-6 \\ y_0=3\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ B(-6, $3\sqrt{3}$) và C(-6, $-3\sqrt{3}$).

Ví dụ 4: Cho Hypecbôn (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1 \text{ và } (d):\ x+6y=0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho ΔABC có diện tích bằng 30.

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (H):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1 \\ x+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(6,-1) \\ B(-6,1) \end{cases} \Rightarrow \text{độ dài } AB=2\sqrt{37}.$$

b. Lấy $C(x_0, y_0)\in(H)$, suy ra:

$$\frac{x_0^2}{32}-\frac{y_0^2}{8}=1 \qquad (1)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Ta được:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.CH=CH\sqrt{37}$$

trong đó:

$$CH=d(C,(d))=\frac{|x_0+6y_0|}{\sqrt{37}}.$$

ΔABC có diện tích bằng 30

$$\Leftrightarrow 30=\sqrt{37}.\frac{|x_0+6y_0|}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-6y_0+30 \\ x_0=-6y_0-30 \end{array}\right..$$

- Với $x_0=-6y_0+30 \xrightarrow{(1)} \frac{(-6y_0+30)^2}{32}-\frac{y_0^2}{8}=1 \Leftrightarrow 8y_0^2-90y_0+217=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=\frac{7}{2} \\ y_0=\frac{31}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1(9,\frac{7}{2}) \\ C_2(-\frac{33}{2},\frac{31}{4}) \end{array}\right.$$

- Với $x_0=-6y_0-30 \xrightarrow{(1)} \frac{(-6y_0-30)^2}{32}-\frac{y_0^2}{8}=1 \Leftrightarrow 8y_0^2+90y_0+217=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=-\frac{7}{2} \\ y_0=-\frac{31}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_3(-9,-\frac{7}{2}) \\ C_4(\frac{33}{2},-\frac{31}{4}) \end{array}\right.$$

Vậy tồn tại 4 điểm C_1, C_2, C_3, C_4 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

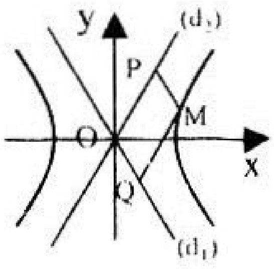
$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

a. CMR tích các khoảng cách từ M∈(H) đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Từ điểm M∈(H) kẻ các đường thẳng song song với hai tiệm cận và cắt chúng tại P, Q. CMR diện tích hình bình hành OPMQ là một hằng số.

Giải

Điểm $M_0(x_0, y_0)\in(H)$



$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2. \qquad (1)$$

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx+ay=0 \\ bx-ay=0 \end{array}\right..$$

a. Khoảng cách h_1 từ điểm M tới tiệm cận bx+ay=0 được xác định bởi:

$$h_1=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Khoảng cách h_2 từ điểm M tới tiệm cận bx-ay=0 được xác định bởi:

$$h_2=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Do đó:

$$h_1.h_2=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{b^2+a^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Vậy, tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ của Hypecbôn (H) đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ với trục Ox. Ta có:

$$tg\alpha=\frac{b}{a} \text{ và } \sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

$$S_{OPMQ}=OP.OQ.\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}.OP.OQ \Rightarrow OP.OQ=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}$$

Mặt khác:

$$S_{OPMQ}=OQ.h_1=OP.h_2 \Rightarrow S^2_{OPMQ}=OP.OQ.h_1h_2=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}.\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow S_{OPMQ}=\frac{ab}{2} \text{ không đổi.}$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng phương trình tham số của Hypecbôn để thực hiện, cụ thể:

Chuyển phương trình Hypecbôn (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t} \\ y=btgt \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Điểm $M\in(H) \Rightarrow M(\frac{a}{\cos t}, btgt)$.

a. Khoảng cách d_1, d_2 từ điểm M tới các tiệm cận (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d_1=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}-ab.tgt\right|}{\sqrt{b^2+a^2}} \text{ và } d_2=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}+ab.tgt\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Do đó:

$$d_1.d_2=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}-ab.tgt\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}\,\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}+ab.tgt\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\left|a^2b^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-tg^2t\right)\right|}{b^2+a^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Vậy, tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ của Hypecbôn (H) đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ với trục Ox. Ta có:

$$tg\alpha=\frac{b}{a} \text{ và } \sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

$$S_{OPMQ}=OP.OQ.\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}.OP.OQ \Rightarrow OP.OQ=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}$$

Mặt khác:

$$S_{OPMQ}=OQ.h_1=OP.h_2$$

$$\Rightarrow S^2_{OPMQ}=OP.OQ.h_1h_2=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}.\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow S_{OPMQ}=\frac{ab}{2} \text{ không đổi.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc Hypecbôn (H) sao cho :

a. Có toạ độ nguyên.

b. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

c. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0.

d. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 90^0.

e. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120^0.

f. Độ dài F_1M ngắn nhất, dài nhất.

g. Khoảng cách từ M đến (Δ): $x-y+1=0$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 2: Tìm điểm M trên (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông, biết (H) có phương trình cho bởi:

a. $(H): \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

b. $(H): \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \sqrt{3}\text{tg}t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \backslash \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \}$.

Bài tập 3: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{, tiêu điểm } F_1(0, -c).$$

Tìm điểm M trên (H) sao cho độ dài F_1M ngắn nhất, dài nhất.

Bài tập 4: Cho Hypecbôn (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1 \text{ và (d): } x\sqrt{2} - y - 2 = 0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho :

- ΔABC có diện tích bằng 5.
- ΔABC cân.
- ΔABC vuông.

Bài tập 5: Cho Hypecbôn (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và (d): } 2x + 15y - 10 = 0.$$

a. CMR $(d) \cap (H) = \{A, B\}$ với $x_A > 0$. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho ΔABC cân tại A.

Bài tập 6: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Gọi (d) là đường thẳng qua O có hệ số góc k, (d') là đường thẳng qua O và vuông góc với (d).

a. Tìm điều kiện đối với k để (d) và (d') đều cắt (H).

b. Tính theo k diện tích hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của (d), (d') và Hypecbôn (H).

c. Xác định k để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 7: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Chứng minh rằng diện tích hình bình hành tạo bởi các tiệm cận của Hypecbôn (H) và các đường thẳng kẻ từ một điểm trên (H) lần lượt song song với các tiệm cận là một hằng số.

Bài tập 8: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a. Tìm điều kiện cần và đủ để tồn tại ΔABC đều nội tiếp trong (H), với A là một đỉnh của (H).

b. Đường thẳng (d) đi qua điểm M cố định không thuộc hai đường tiệm cận của (H) cắt (H) tại A, B. CMR trung điểm I của AB chạy trên một Hypecbôn cố định.

Bài tập 9: Lập phương trình quỹ tích các trung điểm I của đoạn MF_1 khi M di động trên Hypecbôn (H), biết:

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Bài tập 10: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=9.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M cắt Ox tại N. Trên đường thẳng vuông góc với Ox tại N lấy điểm P sao cho $PN=\sqrt{3}\,MN$ với k>0. Lập phương trình quỹ tích các điểm P khi M di động trên (C).

Bài tập 11: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=R^2.$$

Đường tròn (C) cắt trục tung ở A(0, R) và B(0, -R). Đường thẳng y=m ($-R<m<R$, $m\neq0$) cắt (C) tại T và S, đường thẳng qua A, T cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi M thay đổi.

CHỦ ĐỀ 7

PARABÔN

1. ĐỊNH NGHĨA

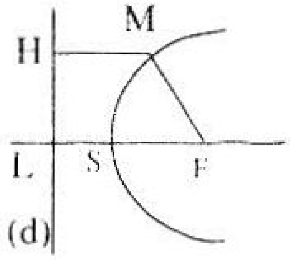
Trong mặt phẳng Oxy cho điểm cố định F và đường thẳng cố định (d).

Parabôn (P) là tập hợp những điểm của mặt phẳng cách đều một đường thẳng (d) cố định và một điểm F cố định không thuộc (d).

Vậy:

$$(P)=\{M \mid MF=MH\}$$

với H là hình chiếu của M lên (d).



- Điểm F gọi là *tiêu điểm*.
- Đường thẳng (d) gọi là *đường chuẩn*.
- FL=p>0 gọi là *tham số tiêu* của (P).
- S (trung điểm của FL) gọi là *đỉnh* của (P).
- Đường thẳng LF là *trục đối xứng* của (P).

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PARABÔN

Trong mặt phẳng Oxy, Parabôn (P) có tiêu điểm F($\frac{p}{2}$, 0) và đường chuẩn (d): $x=-\frac{p}{2}$ có phương trình:

$$(P): y^2=2px.$$

Chú ý: Điểm $M(x, y)\in(P)$ luôn có:

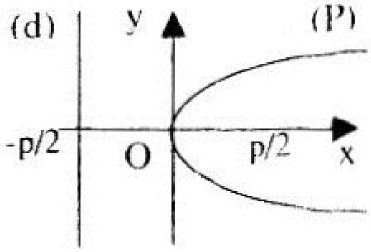
$$FM=x+\frac{p}{2}.$$

3. HÌNH DẠNG CỦA PARABÔN

Với Parabôn (P) có phương trình :

$$(P): y^2=2px, \text{ với } p>0.$$

Các thuộc tính của (P) gồm:



- Đỉnh O(0, 0),
- Tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$, 0),
- Đường chuẩn (d): $x=-\frac{p}{2}$,
- Parabôn nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên phải Ox.

Chú ý: Ngoài dạng chính tắc $y^2=2px$, người ta cũng coi các dạng phương trình sau là phương trình chính tắc của Parabôn:

$$(P): y^2=-2px,$$

$$(P): x^2=\pm 2py.$$

BÀI TOÁN 1

XÁC ĐỊNH CÁC THUỘC TÍNH CỦA PARABÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Xác định các thuộc tính của Parabôn (P).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

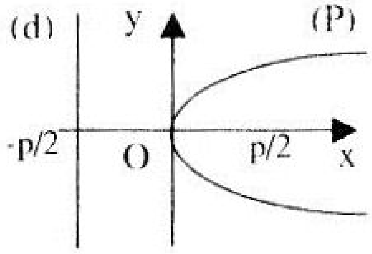
Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Parabôn (P) về dạng chính tắc

$$(P): y^2=\pm 2px \text{ hoặc } (P): x^2=\pm 2py.$$

Bước 2: Xét các khả năng:

Dạng 1: Parabôn (P): $y^2= 2px$ ($p>0$)

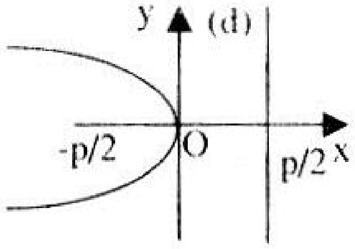
Các thuộc tính của (P) gồm:



- **Đỉnh** O(0, 0).
- Tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$, 0).
- Đường chuẩn (d): $x=-\frac{p}{2}$.
- Parabôn nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên phải Ox.

Dạng 2: Parabôn (P): $y^2= -2px$ ($p>0$)

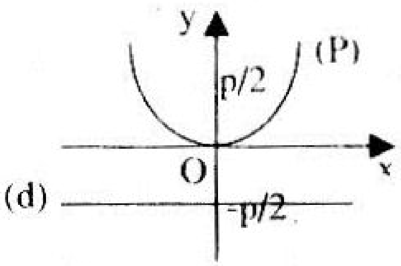
Các thuộc tính của (P) gồm:



- **Đỉnh** O(0, 0).
- Tiêu điểm F ($-\frac{p}{2}$, 0).
- Đường chuẩn (d): $x=\frac{p}{2}$.
- Parabôn nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên trái Ox.

Dạng 3: Parabôn (P): $x^2= 2py$ ($p>0$)

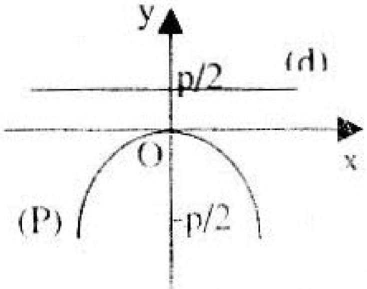
Các thuộc tính của (P) gồm:



- **Đỉnh** O(0, 0).
- Tiêu điểm F (0, $\frac{p}{2}$).
- Đường chuẩn (d): $y=-\frac{p}{2}$.
- Parabôn nhận Oy làm trục đối xứng, đồ thị có hướng lên trên.

Dạng 4: Parabôn (P): $x^2= -2py$ ($p>0$)

Các thuộc tính của (P) gồm:



- **Đỉnh** O(0, 0).
- Tiêu điểm F (0, $-\frac{p}{2}$).
- Đường chuẩn (d): $y=\frac{p}{2}$.
- Parabôn nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị có hướng xuống dưới.

Chú ý: Trong trường hợp phương trình của (P) có dạng:

$$(P): (y-\beta)^2=\pm 2p(x-\alpha) \text{ hoặc } (P): (x-\alpha)^2=\pm 2p(y-\beta)$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$$

ta được:

$$(P): Y^2=\pm 2pX \text{ hoặc } (P): X^2=\pm 2pY.$$

Từ đó chỉ ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục Oxy.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho họ đường cong (P_m) có phương trình:

$$(P_m): y^2-2my-2m^2x+m^2+2m-1=0.$$

Tìm điều kiện của m để (P_m) là phương trình một Parabôn, khi đó:

a. Tìm quĩ tích đỉnh của họ (P_m).

b. Tìm quĩ tích tiêu điểm của họ (P_m).

c. Tìm điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua.

Giải

Chuyển phương trình của (P_m) về dạng:

$$(P_m): (y-m)^2=2m^2\left(x-\frac{2m-1}{2m^2}\right).$$

Để phương trình trên là phương trình của một Parabôn điều kiện là $m\neq 0$.

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS}$ với $S\left(\frac{2m-1}{2m^2}, m\right)$ thành hệ trục SXY, với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x-\dfrac{2m-1}{2m^2} \\ Y = y-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+\dfrac{2m-1}{2m^2} \\ y = Y+m \end{cases}$$

Khi đó:

$$(P): Y^2=2m^2X \Rightarrow p=m^2.$$

Khi đó trong hệ trục SXY, (P_m) có các thuộc tính:

- Đỉnh S.
- Trục đối xứng SX chứa tiêu điểm $F\left(\frac{m^2}{2}, 0\right)$.
- Phương trình đường chuẩn (d): $X=-\frac{m^2}{2}$.

Do đó trong hệ trục Oxy, (P_m) có các thuộc tính:

- Đỉnh $S\left(\frac{2m-1}{2m^2}, m\right)$.

- Trục đối xứng là y-m=0 chứa tiêu điểm F($\frac{m^2}{2}+\frac{2m-1}{2m^2}$, m).
- Phương trình đường chuẩn (d): $x+\frac{m^2}{2}-\frac{2m-1}{2m^2}=0$.

a. Quĩ tích đỉnh của họ (P_m).

$$S:\begin{cases}x=\frac{2m-1}{2m^2}\\ y=m\end{cases} \Rightarrow x=\frac{2y-1}{2y^2}.$$

Vậy quĩ tích đỉnh của (P_m) thuộc đường cong (C_1): $x=\frac{2y-1}{2y^2}$.

b. Quĩ tích tiêu điểm của họ (P_m).

$$F:\begin{cases}x=\frac{m^2}{2}+\frac{2m-1}{2m^2}\\ y=m\end{cases} \Rightarrow x=\frac{y^2}{2}+\frac{2y-1}{2y^2} \Leftrightarrow x=\frac{y^4+2y-1}{2y^2}.$$

Vậy quĩ tích tiêu điểm của (P_m) thuộc đường cong (C_2): $x=\frac{y^4+2y-1}{2y^2}$.

c. Gọi M(x, y) là điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua, khi đó:

$y^2-2my-2m^2x+m^2+2m-1=0,\ \forall m \Leftrightarrow (1-2x)m^2+2(1-y)m+y^2-1=0,\ \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x=0\\ 1-y=0\\ y^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy (P_m) luôn đi qua điểm cố định M($\frac{1}{2}$, 1).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chuyển phương trình Parabôn (P) về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình:

a. (P) : $y^2+2y-4x-3=0$.

b. (P) : $y^2-6y+2x+1=0$.

c. (P) : $x^2+2x-2y+3=0$.

d. (P) : $x^2-4x+4y+2=0$.

Bài tập 2: Cho họ đường cong (P_m) có phương trình:

(P) : $y^2-2my-2mx+m^2=0$.

Tìm điều kiện của m để (P_m) là phương trình một Parabôn, khi đó:

a. Tìm quĩ tích đỉnh của họ (P_m).

b. Tìm quĩ tích tiêu điểm của họ (P_m).

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng phương trình: $Ax^2+By=0$, với A, B≠0 là phương trình của một Parabôn có đỉnh O(0, 0), nhận Oy làm trục đối xứng. Tìm tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của Parabôn đó.

Bài tập 4: Chứng tỏ rằng phương trình: $Ay^2+Bx=0$, với A, B≠0 là phương trình của một Parabôn có đỉnh O(0, 0), nhận Ox làm trục đối xứng. Tìm tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của Parabôn đó.

BÀI TOÁN 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH PARABÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Lập phương trình của Parabôn (P).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Parabôn

$$(P): y^2=2px \text{ hoặc } (P): x^2=2py.$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (P)$ có tiêu điểm F và đường chuẩn (d).

Bước 2: Chuyển MF=MH thành biểu thức giải tích nhờ:

$MF^2=(x-x_F)^2+(y-y_F)^2$

và $MH=d(M, (d))$.

Bước 3: Thu gọn.

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2px.$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Parabôn hoặc chứng minh tập hợp điểm là Parabôn.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Viết phương trình Parabôn (P) có đỉnh là gốc toạ độ và đi qua điểm A(2, 2).

Giải

Parabôn (P) có đỉnh O có phương trình

$$(P): y^2=2px \text{ hoặc } (P): x^2=2py.$$

Trường hợp 1: Nếu phương trình của (P) là:

$$(P): y^2=2px.$$

Vì $A \in (P)$, suy ra:

$$4=4p \Leftrightarrow p=1.$$

Khi đó phương trình Parabôn (P_1): $y^2=2x$.

Trường hợp 2: Nếu phương trình của (P) là:

(P): $x^2=2py$.

Vì $A\in(P)$, suy ra $4=4p \Leftrightarrow p=1$.

Khi đó phương trình Parabôn (P_2): $x^2=2y$.

Vậy tồn tại hai Parabôn (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho điểm F(3, 0) và đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $3x-4y+16=0$.

a. Tính khoảng cách từ F đến (d) từ đó suy ra phương trình đường tròn tâm F tiếp xúc với đường thẳng (d).

b. Viết phương trình Parabôn (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc toạ độ. Chứng minh rằng (P) tiếp xúc với (d). Tìm toạ độ của tiếp điểm.

Giải

a. Gọi h là khoảng cách từ F đến (d), ta có

$$h=\frac{|3.3-4.0+16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.$$

Đường tròn (C) tâm F(3, 0) tiếp xúc với (d)

$$\Leftrightarrow (C): \begin{cases}\text{tam } F(3,0)\\ \text{Bán kính } R=5\end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-3)^2+y^2=25.$$

b. Parabôn (P) có tiêu điểm F(3, 0) và đỉnh O(0, 0) có phương trình

(P): $y^2=2px$.

Ta có $\frac{p}{2}=3 \Rightarrow p=6$.

Vậy phương trình Parabôn (P): $y^2=12x$.

- CMR (P) tiếp xúc với (d). Thật vậy, xét hệ phương trình

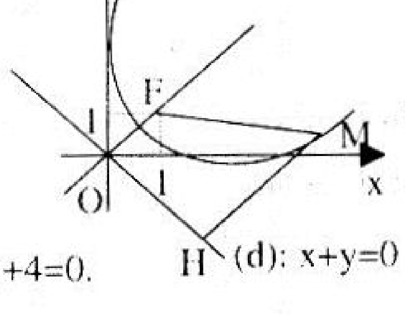
$$\begin{cases}y^2=12x\\ 3x-4y+16=0\end{cases} \Rightarrow y^2=4(4y-16)$$

$$\Leftrightarrow y^2-16y+64=0 \Leftrightarrow y=8 \text{ (nghiệm kép)} \Rightarrow x=\frac{16}{3}.$$

Vậy (P) tiếp xúc với (d) tại tiếp điểm $A(\frac{16}{3}, 8)$.

Ví dụ 3: Lập phương trình Parabôn (P) có tiêu điểm F(1, 1) và đường chuẩn (d): $x+y=0$.

Giải



Lấy $M(x, y)\in(P)$, ta có:

$$MF=d(M, (d)) \Leftrightarrow MF^2=d^2(M, (d))$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-4x-4y+4=0$$

Vậy phương trình Parabôn (P): $x^2+y^2-2xy-4x-4y+4=0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Lập phương trình Parabôn (P) có đỉnh là gốc toạ độ trong mỗi trường hợp sau:

a. Biết đường chuẩn là $x=-2$.

b. Đi qua điểm $A(2, -1)$ và nhận trục hoành làm trục đối xứng.

Bài tập 2: Cho điểm $F(3, 0)$.

a. Lập phương trình Parabôn (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc toạ độ.

b. Một điểm nằm trên Parabôn (P) có hoành độ $x=2$. Hãy tính khoảng cách từ điểm đó tới tiêu điểm.

c. Qua $I(2, 0)$ dựng đường thẳng (d) thay đổi luôn cắt Parabôn (P) tại hai điểm A, B. CMR tích số khoảng cách từ A và B tới Ox là một hằng số.

Bài tập 3: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x+2y=0$.

a. Lập phương trình Parabôn (P) có đỉnh là gốc toạ độ, nhận trục hoành làm trục đối xứng và chắn trên đường thẳng (d) một đoạn bằng $4\sqrt{5}$.

b. Gọi F là tiêu điểm của Parabôn (P). Lập phương trình đường tròn tâm F và tiếp xúc với đường thẳng (d).

Bài tập 4: Lập phương trình Parabôn (P) có đỉnh là gốc toạ độ trong mỗi trường hợp sau:

a. Biết tiêu điểm $F(4, 2)$ và đường chuẩn là trục Ox.

b. Biết đỉnh $S(3, 2)$ và đường chuẩn là trục Oy.

c. Biết đỉnh $S(-1, 2)$ và tiêu điểm $F(-1, 4)$.

Bài tập 5: Viết phương trình Parabôn (P) có đỉnh $A(1, -2)$ và (P) chắn trên đường thẳng (d): $y=x+1$ một dây cung $MN=\sqrt{34}$.

Bài tập 6: Lập phương trình Parabôn (P) có đỉnh là gốc toạ độ trong mỗi trường hợp sau:

a. Biết tiêu điểm $F(0, 2)$ và đường chuẩn (d): $3x-4y-12=0$.

b. Biết tiêu điểm $F(3, 2)$ và đỉnh $S(2, 1)$.

c. Biết đỉnh $S(1, 3)$ và đường chuẩn (d): $x-2y=0$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. (P): $y^2=8x$.

b. (P): $y^2=\frac{1}{2}x$.

Bài tập 4:

a. (P): $(x-4)^2=4(y-1)$.

b. (P): $(y-2)^2=12(x-3)$.

c. (P): $(x+1)^2=8(y-2)$.

Bài tập 5: (P_1): $y=x^2-2x-1$ và (P_2): $y=-\frac{1}{17}(x^2-2x-35)$.

Bài tập 6:

a. (P): $16x^2+9y^2+24xy+72x-196y-44=0$.

b. (P): $x^2+y^2-2xy-10x-6y+25=0$.

c. (P): $4x^2+y^2+4xy-50y+125=0$.

BÀI TOÁN 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABÔN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của điểm $M(x_0, y_0)$ với Parabôn (P) : $y^2=2px$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với Parabôn (P) là :

$$P_{M/(P)}=y_0^2-2px_0.$$

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $P_{M/(P)}<0 \Leftrightarrow$ M nằm trong Parabôn.
- Nếu $P_{M/(P)}=0 \Leftrightarrow$ M nằm trên Parabôn.
- Nếu $P_{M/(P)}>0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài Parabôn.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- $M(x, y)\in$ *miền trong* của (P) $\Rightarrow$ qua M không thể kẻ được tiếp tuyến tới (P).
- $M(x, y)\in$ *miền ngoài* của (P) $\Rightarrow$ qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (P).
- $M(x, y)$ nằm trên (P) $\Rightarrow$ qua M kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

Bài toán 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng với Parabôn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (P).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): y^2=4x \text{ và } (d): 2x-y-4=0.$$

Tìm các điểm $M\in(d)$ để từ đó:

a. Không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P).

b. Kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

c. Kẻ được hai tiếp tuyến tới (P).

Giải

Với mỗi điểm $M(x_0, y_0)\in(d)$, ta có:

$$2x_0-y_0-4=0 \Leftrightarrow y_0=2x_0-4.$$

$$P_{M/(P)}=y_0^2-4x_0=(2x_0-4)^2-4x_0=4x_0^2-20x_0+16.$$

a. Để từ M không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P)

$$\Leftrightarrow P_{M/(P)}<0 \Leftrightarrow 4x_0^2-20x_0+16<0 \Leftrightarrow 1<x_0<4.$$

Vậy, tập hợp các điểm $M(x_0, y_0)\in(d)$ có hoành độ thoả mãn $1<x_0<4$ không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P).

b. Để từ M kẻ được một tiếp tuyến tới (P)

$$\Leftrightarrow P_{M/(P)}=0 \Leftrightarrow 4x_0^2-20x_0+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1,-2) \\ M_2(4,4) \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai điểm $M_1(1, -2)$ và $M_2(4, 4)$ thuộc (d) từ đó kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

c. Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến tới (P)

$$\Leftrightarrow P_{M/(P)}>0 \Leftrightarrow 4x_0^2-20x_0+16>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0<1 \\ x_0>4 \end{array}\right.$$

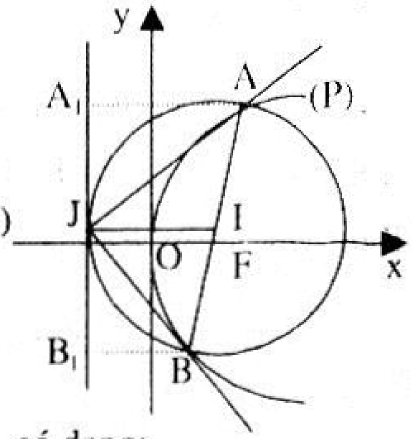
Vậy, tập hợp các điểm $M(x_0, y_0)\in(d)$ có hoành độ $x_0\in(-\infty, 1)\cup(4, +\infty)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới (P).

Ví dụ 2: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2px,\ p>0.$$

CMR đường tròn có đường kính là dây cung qua tiêu, tiếp xúc với đường chuẩn.

Chứng minh



Phương trình đường thẳng (d) đi qua F có dạng:

$$(d): 2mx-2y-mp=0.$$

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2=2px \\ 2mx-2y-mp=0 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$4m^2x^2-4p(m^2+2)x+m^2p^2=0 \qquad (1)$$

Từ đó, ta có :

$$\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{p(m^2+2)}{m^2} \\ x_A.x_B=\dfrac{p^2}{4} \end{cases}.$$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$my^2-2py-mp^2=0 \qquad (2)$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} y_A+y_B=\dfrac{p}{m} \\ y_A.y_B=p^2 \end{cases},$$

- Phương trình đường tròn (C) đường kính AB:

$$M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0.$$

Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm của đường tròn (C), ta có:

$$I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{p(m^2+2)}{2m^2} \\ y = \dfrac{p}{m} \end{cases}.$$

Gọi R là bán kính của đường tròn (C), ta có:

$$R^2 = x_A^2 + x_B^2 - (x_Ax_B + y_Ay_B) = \left[\frac{p(m^2+1)}{m^2}\right]^2 \Leftrightarrow R = \frac{p(m^2+1)}{m^2}.$$

Khoảng cách từ I đến đường chuẩn (Δ): $x = -\dfrac{p}{2}$ của (P), được xác định bởi:

$$\frac{|2x_I + p|}{2} = \frac{1}{2}\left|\frac{p(m^2+2)}{m^2} + p\right| = \frac{p(m^2+1)}{m^2} = R.$$

Vậy đường tròn (C) tiếp xúc với đường chuẩn (Δ) của (P).

Chú ý:

1. Ta có thể chứng minh bằng định nghĩa, thực hiện các bước:

   Bước 1: Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên đường chuẩn của (P).
   Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1B_1.

   Bước 2: Ta có:

   $$IJ = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{1}{2}(AF + BF) = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \Delta ABJ \text{ vuông tại } J$$

   ⇔ Đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của Parabôn (P).

2. Đề nghị bạn đọc chứng minh thêm các tính chất sau:

   a. Tính độ dài FA, FB theo p, $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ với $0 \le \alpha \le 2\pi$. Từ đó chứng tỏ rằng $\dfrac{1}{FA} + \dfrac{1}{FB}$ không đổi khi (d) quay quanh F.

   b. CMR FA.FB nhỏ nhất khi (d) vuông góc với Ox.

Ngoài ra còn có tích các khoảng cách từ A và B đến trục Ox là một đại lượng không đổi.

Ví dụ 3: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2 = 4x.$$

Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của (P) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. CMR tích các khoảng cách từ A và B đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

Giải

Parabôn (P) có tiêu điểm F(1, 0).

Đường thẳng (d): $ax+by+c=0$ đi qua $F(1, 0)$ có dạng:

(d): $ax+by-a=0$.

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ ax + by - a = 0 \end{cases}$$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$ay^2+4by-4a=0. \quad (1)$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} y_A + y_B = -\dfrac{4b}{a} \\ y_A \cdot y_B = -4 \end{cases}$$

Khoảng cách từ A và B đến trục Ox theo thứ tự là:

$h_1=|y_A|$, $h_2=|y_B|$.

Nhận xét tích

$h_1.h_2=|y_A.y_B|=4$.

Vậy, tích các khoảng cách từ A và B đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

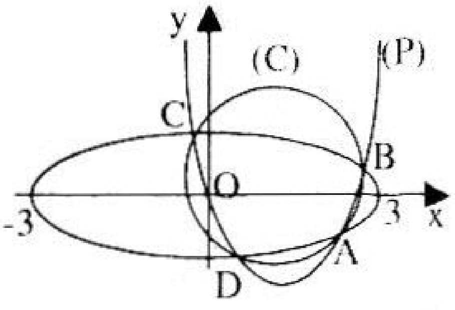
Ví dụ 4: Cho Parabôn (P) và Elíp (E) có phương trình:

$$(P): y=x^2-2x \text{ và } (E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1.$$

a. CMR (P) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

b. Lập phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó.

Giải



a. Xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (E)

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad (I)$$

$\Rightarrow x^2+9(x^2-2x)^2=9$

$\Leftrightarrow f(x)=9x^4-36x^3+37x^2-9=0. \quad (1)$

Ta có:

$f(-1)=73>0$, $f(0)=-9<0$, $f(1)=1<0$, $f(2)=-77<0$, $f(3)=81>0$

Do đó:

- $f(-1).f(0)<0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(-1, 0)$.
- $f(0).f(1)<0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(0, 1)$.
- $f(1).f(2)<0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(1, 2)$.
- $f(2).f(3)<0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(2, 3)$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (d)\cap(P)=\{A, B, C, D\}$.

b. Từ hệ (I), ta được :

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ 8(x^2 - 2x) = 8y \end{cases} \Rightarrow 9x^2+9y^2-16x-8y-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{8}{9})^2+(y-\frac{4}{9})^2=\frac{161}{81}. \quad (*)$$

Nhận xét rằng toạ độ của A,B,C,D cùng thoả mãn (*).

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có dạng:

$$(C): (x-\frac{8}{9})^2+(y-\frac{4}{9})^2=\frac{161}{81}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Parabôn và đường thẳng (d) có phương trình:

$(P): y=4x^2+1$ và $(d): 3x+y-1=0$.

Tìm các điểm $M\in(d)$ để từ đó:

a. Không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P).

b. Kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

c. Kẻ được hai tiếp tuyến tới (P).

Bài tập 2: Cho Parabôn có phương trình:

$(P): y^2=2px$.

M là một điểm thuộc miền trong của (P), M_1, M_2, M_3 là chân của các pháp tuyến kẻ từ M đến (P) (đường thẳng (d) cắt (P) tại A được gọi là pháp tuyến của (P) $\Leftrightarrow$ (d) vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại A).

a. Chứng minh rằng tứ giác $OM_1M_2M_3$ nội tiếp đường tròn.

b. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OM_1M_2M_3$.

Bài tập 3: Cho Parabôn có phương trình:

$(P): x^2=4y$.

Điểm M khác O chạy trên (P). Gọi A, B theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên Ox và Oy. Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng qua B vuông góc với OM luôn đi qua một điểm cố định.

b. Đường thẳng qua B vuông góc với AB luôn đi qua một điểm cố định.

c. Đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một Parabôn cố định.

Bài tập 4: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$(P): x^2=4y$ và $(d): x-y-1=0$.

a. Chứng minh rằng (d) tiếp xúc với (P), xác định toạ độ tiếp điểm M.

b. Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với (d), từ đó tìm toạ độ giao điểm thứ hai N của (Δ) với (P).

Bài tập 5: Cho Parabôn và đường thẳng (d) có phương trình:

$(P): y=x^2-2x+2$ và $(d_1): x-y-1=0$.

Lập phương trình đường thẳng (d) cùng phương với đường thẳng (d_1) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB=4.

Bài tập 6: Cho Parabôn và đường thẳng (d_1) có phương trình:

$(P): x^2=2py$ và $(d): 2x-2my+mp=0$.

Gọi A, B là các giao điểm của (P) và (d).

a. Chứng minh rằng ường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của Parabôn (P).

b. Tìm quỹ tích tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

Bài tập 7: Cho hai Parabôn (P_1) và (P_2) có phương trình:

$(P_1): y^2=4x$ và $(P_2): y=x^2-4x$.

a. Chứng minh rằng (P_1) cắt (P_2) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

b. Lập phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó.

BÀI TOÁN 4

ĐIỂM THUỘC PARABÔN - QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm điểm M thuộc Parabôn (P) thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với Parabôn (P) có phương trình:

$$(P):\ y^2=2px$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0)\in(P) \Rightarrow y_0^2=2px_0$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0.

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm thì ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:
$$MF=x_0+\frac{p}{2}.$$
2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc thì ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Parabôn với một đường khác thì ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P):\ y^2=x \text{ và } (d):\ x-y-2=0.$$

a. Xác định toạ độ giao điểm A, B của (d) và (P).

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (P) sao cho :

- ΔABC có diện tích bằng 6.
- ΔABC đều.

c. Tìm điểm M trên cung AB của Parabôn (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất.

Giải

a. Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2=x \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1,-1) \\ B(4,2) \end{cases} \text{ và } AB=3\sqrt{2}.$$

b. Với $C(x, y)\in(P) \Rightarrow C(y^2, y)$.

- ΔABC có diện tích bằng 6

$$\Leftrightarrow 6=\frac{1}{2}AB.d(C,(d))=\frac{1}{2}.3\sqrt{2}.\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}|y^2-y-2|$$

$$\Leftrightarrow |y^2-y-2|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-y-2=4 \\ y^2-y-2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1(4,-2) \\ C_2(9,3) \end{array}\right.$$

- ΔABC đều

$$\Leftrightarrow AB=BC=CA \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases}$$

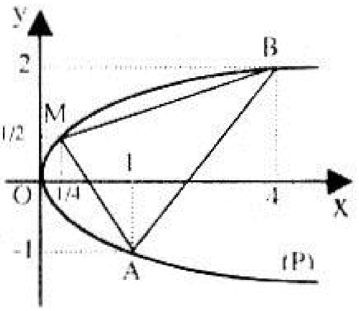
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 = (y^2-1)^2 + (y+1)^2 \\ (y^2-1)^2 + (y+1)^2 = (y^2-4)^2 + (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y^2 + 2y - 16 = 0 \\ y^2 + y - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2 - y + 3)(y^2 + y - 3) - 4y - 7 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 7 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại điểm C thuộc (P) để ΔABC đều.

c. $M(x_0, y_0)$ thuộc cung AB của (P) nên:

$$\begin{cases} x_0 = y_0^2 \\ -1 \le y_0 \le 2 \quad (*) \end{cases}$$



Tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất

⇔ ΔMAB có diện tích lớn nhất

⇔ d(M, (d)) lớn nhất.

Ta có:

$$d(M, (d)) = \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|y_0^2 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(y_0+1)(2-y_0)$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\le} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(y_0+1)+(2-y_0)}{2}\right]^2 = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

Do đó $\text{Max}\, d(M, (d)) = \frac{9\sqrt{2}}{8}$, đạt được khi

$$y_0+1 = 2-y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Vậy với $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho Parabôn (P) có phương trình:

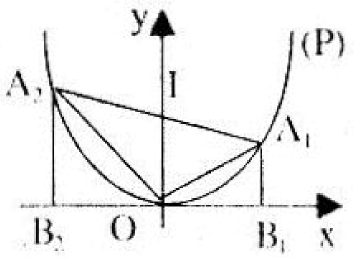
(P): $y=x^2$.

Một góc vuông ở đỉnh O cắt Parabôn tại A_1 và A_2. Hình chiếu của A_1 và A_2 lên Ox là B_1 và B_2.

a. Chứng minh rằng $OB_1.OB_2$=const.

b. Chứng minh rằng A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a. thì $A_1 \in (P) \Rightarrow A_1(x_0, x_0^2)$.

Khi đó:

- $B_1(x_0, 0) \Rightarrow OB_1 = |x_0|$.
- Phương trình đường thẳng (OA_1): $y = xx_0$.

- Theo giả thiết $OA_2 \perp OA_1$

  $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng (OA_2): $y=-\frac{1}{x_0}x$.

- Toạ độ của A_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$A_2: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{x_0}x \end{cases} \Rightarrow A_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{x_0} \\ y = \frac{1}{x_0^2} \end{cases} \Rightarrow A_2(-\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_0^2}).$$

- $B_2(-\frac{1}{x_0}, 0) \Rightarrow OB_2=|-\frac{1}{x_0}|$.

  Vậy $OB_1.OB_2=1$.

b. CMR A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

- Phương trình (A_1A_2) được xác định bởi:

$$(A_1A_2): \frac{x+\frac{1}{x_0}}{x_0+\frac{1}{x_0}} = \frac{y-\frac{1}{x_0^2}}{x_0^2-\frac{1}{x_0^2}} \Leftrightarrow (A_1A_2): x\,x_0^3+(1-y)\,x_0^2-x x_0=0 \qquad (1)$$

- Ta đi chứng minh A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

  Thật vậy giả sử $I(x, y)$ là điểm cố định của họ đường thẳng A_1A_2

$$\Leftrightarrow (1) \text{ đúng với mọi } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(0, 1).$$

  Vậy (A_1A_2) luôn đi qua một điểm cố định $I(0, 1)$.

Ví dụ 3: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2px \text{ với } p>0.$$

Điểm M khác O chạy trên (P). Gọi A, B theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên Ox và Oy. CMR

a. Đường thẳng qua B vuông góc với OM luôn đi qua một điểm cố định.
b. Đường thẳng qua B vuông góc với AB luôn đi qua một điểm cố định.
c. Đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một Parabôn cố định.

Giải

Điểm $M \in (P)$ suy ra

$$M(\frac{y_0^2}{2p}, y_0),\ A(\frac{y_0^2}{2p}, 0) \text{ và } B(0, y_0).$$

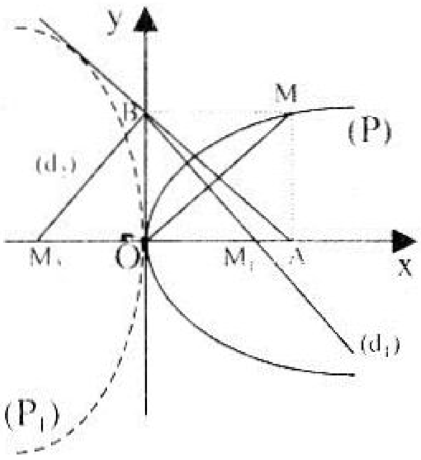
a. Đường thẳng (d_1) qua B vuông góc với OM được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{OM}(\frac{y_0^2}{2p}, y_0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{y_0^2}{2p}.x+y_0(y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow (d_1): y_0^2.x+2py_0y-2py_0^2=0.$$

Nhận xét rằng (d_1) luôn đi qua điểm cố định $M_1(2p, 0)$.

b. Đường thẳng (d_2) qua B vuông góc với AB được cho bởi:



$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BA}(\frac{y_0^2}{2p}, -y_0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (d_2)$: $\frac{y_0^2}{2p}.x-y_0(y-y_0)=0$

$\Leftrightarrow (d_2)$: $y_0^2.x-2py_0y+2p\,y_0^2=0$.

Nhận xét rằng (d_2) luôn đi qua điểm cố định $M_2(-2p, 0)$.

Chú ý: Cũng có thể chứng minh bằng cách:

Gọi M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua Oy $\Rightarrow M_2(-2p, 0)$.

Nhận xét rằng $BM_2 \perp AB$.

Vậy đường thẳng qua B vuông góc với AB luôn đi qua điểm cố định M_2

c. Đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BA}(\frac{y_0^2}{2p}, -y_0) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x}{\frac{y_0^2}{2p}} = \frac{y-y_0}{-y_0-y_0}$$

$\Leftrightarrow$ (AB): $2px+y_0y-y_0^2=0$.

- Gọi N(x, y) là điểm mà (AB) không đi qua với mọi y_0, khi đó phương trình $2px+y_0y-y_0^2=0$, vô nghiệm $\forall y_0$

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y_0^2-y_0y-2px=0$, vô nghiệm $\forall y_0$

  $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow y^2+8px<0$.

- Ta đi chứng minh (AB) luôn tiếp xúc với Parabôn (P_1): $y^2=-8px$.

Thật vậy:

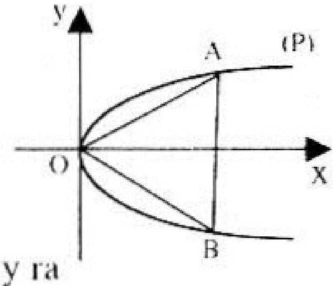
$-2AC+pB^2=2.2p.(-y_0^2)+4p.\,y_0^2=0$.

Vậy (AB) luôn tiếp xúc với Parabôn (P_1): $y^2=-8px$.

Ví dụ 4: Cho Parabôn (P) có phương trình:

(P): $y^2=2px$.

Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho ΔOAB đều.



Giải

Ta có ΔOAB đều

$\Leftrightarrow OA=OB=OC \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OA = OB \end{cases}$.

Từ điều kiện OA=OB, do tính đối xứng của (P), suy ra

A, B đối xứng qua Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0, y_0),\ x_0 \neq 0 \\ B(x_0, -y_0) \end{cases}$.

Vậy tóm lại điều kiện là:

$$\begin{cases} A \in (H) \\ d(O, AB) = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = 2px_0 \\ |x_0| = y_0\sqrt{3} \end{cases}$$

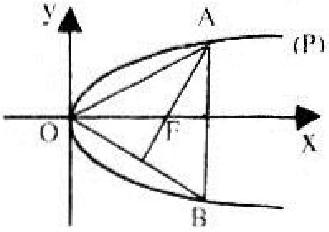
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6p \\ y_0 = \pm 2p\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6p, 2p\sqrt{3}) \\ B(6p, -2p\sqrt{3}) \end{cases}$$

Ví dụ 5: Cho Parabôn (P) có phương trình:

(P): $y^2=2px$.

Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho ΔOAB nhận tiêu điểm F làm trực tâm.

Giải



Ta có ΔOAB nhận F làm trực tâm

$\Rightarrow OF \perp AB \Rightarrow$ A, B đối xứng qua Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0, y_0),\ x_0 \neq 0 \\ B(x_0, -y_0) \end{cases}.$$

Vậy tóm lại điều kiện là:

$$\begin{cases} A \in (H) \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = 2px_0 \\ x_0(x_0 - \dfrac{p}{2}) - y_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{5p}{2} \\ y_0 = \pm p\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\dfrac{5p}{2}, p\sqrt{5}) \\ B(\dfrac{5p}{2}, -p\sqrt{5}) \end{cases}$$

Chú ý: Bạn đọc hãy sử dụng ý tưởng trên để tìm lời giải cho các câu hỏi:

Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho ΔOAB nhận tiêu điểm F:

a. Làm trọng tâm.

b. Làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

c. Làm tâm đường tròn nội tiếp.

Ví dụ 6: Cho Parabôn (P) có phương trình:

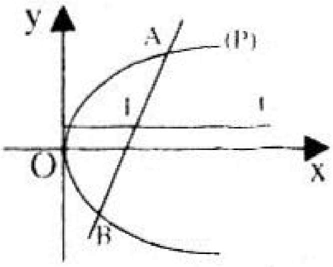
(P): $y^2=2px$.

Đường thẳng (d) có phương không đổi cắt Parabôn (P) tại A, B. Chứng minh rằng trung điểm I của AB chạy trên một đường thẳng cố định cùng phương với Ox.

Giải

Giả sử (d) có vectơ chỉ phương $\vec{v}(\alpha, \beta)$ không đổi và $I(x_0, y_0)$, khi đó:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, t \in R.$$



Xét sự tương giao của (d) và (H) là:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta^2 t^2 + 2(\beta y_0 - p\alpha)t + y_0^2 - 2px_0 = 0.$ (1)

Vì $(d)\cap(P)=\{A, B\}$ nên (1) có hai nghiệm t_A, t_B thoả mãn:

$$\begin{cases} t_A+t_B=\dfrac{2(\alpha p-\beta y_0)}{\beta^2} \\ t_At_B=\dfrac{y_0^2-2px_0}{\beta^2} \end{cases}$$

Vì I là trung điểm AB nên:

$$2x_0=x_A+x_B=(x_0+\alpha t_A)+(x_0+\alpha t_B) \Leftrightarrow t_A+t_B=0 \Leftrightarrow p\alpha-\beta y_0=0. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng toạ độ I luôn thoả mãn (2), vậy quỹ tích trung điểm I thuộc đường thẳng (Δ): $\beta y-p\alpha=0$ cố định cùng phương với Ox.

Ví dụ 7: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2px.$$

Đường thẳng (d) đi qua điểm M cố định không thuộc (P) và cắt (P) tại A, B. CMR trung điểm I của AB chạy trên một Parabôn cố định.

Giải

Giả sử $M(x_M, y_M)$ và $I(x_0, y_0)$, khi đó:

$$(d): \begin{cases} x=x_0+(x_M-x_0)t \\ y=y_0+(y_M-y_0)t \end{cases}, t\in R.$$

Xét sự tương giao của (d) và (P) là:

$$\begin{cases} x=x_0+(x_M-x_0)t \\ y=y_0+(y_M-y_0)t \\ y^2=2px \end{cases} \Rightarrow (y_M-y_0)^2t^2+2[(y_M-y_0)y_0-p(x_M-x_0)]t+y_0^2-2px_0=0$$

Vì $(d)\cap(P)=\{A, B\}$ nên (1) có hai nghiệm t_A, t_B thoả mãn:

$$\begin{cases} t_A+t_B=\dfrac{2[(x_M-x_0)p-(y_M-y_0)y_0]}{(y_M-y_0)^2} \\ t_At_B=\dfrac{y_0^2-2px_0}{(y_M-y_0)^2} \end{cases}$$

Vì I là trung điểm AB nên:

$$2x_0=x_A+x_B=[x_0+(x_M-x_0)t_A]+[x_0+(x_M-x_0)t_B] \Leftrightarrow t_A+t_B=0$$

$$\Leftrightarrow (x_M-x_0)p-(y_M-y_0)y_0=0 \Leftrightarrow (y_0-\frac{y_M}{2})^2=(x_0-x_M)p+\frac{y_M^2}{4}. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng toạ độ I luôn thoả mãn (2), vậy quỹ tích trung điểm I thuộc Parabôn

$$(P_1): (y-\frac{y_M}{2})^2=(x-x_M)p+\frac{y_M^2}{4}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

(P): $y^2=4x$ và (d): $2x-y-4=0$.

a. Xác định toạ độ giao điểm A, B của (d) và (P).

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (P) sao cho :
   - ΔABC có diện tích bằng $3\sqrt{10}$.
   - ΔABC vuông .
   - ΔABC đều.

c. Tìm điểm M trên cung AB của Parabôn (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất.

Bài tập 2: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=4x.$$

a. Tìm điểm A trên (P) có bán kính qua tiêu điểm bằng 10 và tung độ dương.

b. Tìm điểm B trên (P) sao cho ΔOAB vuông tại O.

Bài tập 3: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): x=y^2.$$

Một góc vuông ở đỉnh O cắt Parabôn tại A_1 và A_2. Hình chiếu của A_1 và A_2 lên trục hoành là B_1 và B_2.

a. Chứng minh rằng $OB_1.OB_2=\text{const}$.

b. Chứng minh rằng A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 4: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2x.$$

Xác định toạ độ các điểm A, B trên (P) sao cho ΔOAB:

a. Đều.

b. Nhận tiêu điểm F làm trực tâm.

Bài tập 5: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=4x.$$

Các điểm A, B, C phân biệt thuộc (P) có tung độ lần lượt là 2a, 2b, 2c. Gọi (d_1), (d_2), (d_3) là các tiếp tuyến của (P) tại A, B, C. Giả sử $(d_2)\cap(d_3)=A_1$; $(d_3)\cap(d_1)=B_1$; $(d_1)\cap(d_2)=C_1$.

a. Tìm toạ độ các điểm A_1, B_1, C_1 theo a, b, c.

b. Chứng minh rằng trực tâm H_1 của $\Delta A_1B_1C_1$ nằm trên đường chuẩn của (P) và tìm toạ độ của H_1.

c. Chứng minh rằng diện tích ΔABC bằng hai lần diện tích $\Delta A_1B_1C_1$.

d. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$, từ đó suy ra tiêu điểm F của (P) thuộc đường tròn đó.

Bài tập 6: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): x^2=y.$$

A là điểm cố định thuộc (P), các điểm B, C thay đổi trên (P) sao cho ΔABC vuông tại A.

a. Chứng minh rằng BC luôn đi qua điểm M cố định.

b. Lập phương trình đường tròn đường kính AM, từ đó chứng minh rằng đường tròn này tiếp xúc với (P). Xác định các tiếp điểm.

Bài tập 7: C[illegible] Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): y=\frac{1}{2}x^2 \text{ và } (d): 2mx-2y+1=0.$$

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, (d) luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N.

b. Tìm quĩ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

c. Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến tại M và N của (P).

Bài tập 8: Cho điểm A(a, 0), a≠0. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $d^2(M, Oy)-MA^2=k^2$, với k cho trước.

Bài tập 9: Đường thẳng (d) cắt Parabôn (P): $y^2=4x$ tại A, B. Chứng minh rằng trung điểm I của AB chạy trên:

a. Một đường thẳng cố định cùng phương với Ox nếu (d) có hệ số góc k=1.

b. Một Parabôn cố định nếu (d) luôn đi qua M(1, 1).

Bài tập 10: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2px.$$

Giả sử đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm F của (P) và tạo với chiều dương của trục Ox một góc α và cắt (P) tại hai điểm M, N.

a. Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng MN theo p và α.

b. Từ đó suy ra quỹ tích I khi α thay đổi.

Bài tập 11: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y=ax^2.$$

a. Tìm quĩ tích trung điểm các dây cung của (P) có hệ số góc k cho trước.

b. Tìm quĩ tích trung điểm các dây cung chắn trên (P) một viên phân có diện tích S cho trước.

c. Tính tỉ số lớn nhất của diện tích một tam giác nội tiếp với diện tích của viên phân Parabôn ngoại tiếp.

d. Hãy xác định một đường thẳng đi qua một điểm $M(x_0, y_0)$ bên trong (P) và chắn trên (P) một viên phân có diện tích nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4:

a. $A(6, 2\sqrt{3})$ và $B(6, -2\sqrt{3})$.

b. $A(\frac{5}{2}, \sqrt{5})$ và $B(\frac{5}{2}, -\sqrt{5})$.

Bài tập 7:

b. $(P_1): y=x^2+\frac{1}{2}$.

c. 90^0.

TỔNG KẾT
BA ĐƯỜNG CÔNÍC

I. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA ĐƯỜNG CÔNÍC

Định nghĩa 1: Đường chuẩn của Elíp (Hypecbôn) ứng với tiêu điểm F_i (i=1,2) là đường thẳng (Δ_i) (i=1,2) vuông góc với trục đối xứng chứa các tiêu điểm nằm về cùng một phía với F_i đối với trục đối xứng còn lại và cách tâm của Elíp (Hypecbôn) một đoạn $\frac{a}{e}$ với e là tâm sai và a là độ dài nửa trục lớn (trục thực).

a. Với Elíp (E):

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ với } a>b,$$

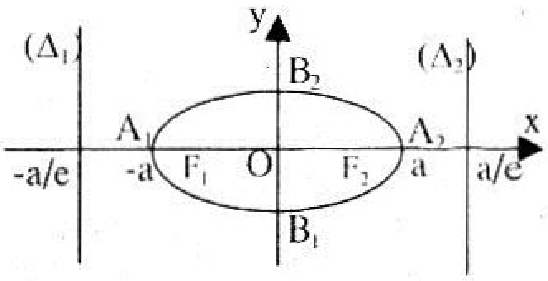
ta có:

- Ứng với $F_1(-c, 0)$ là đường chuẩn

  (Δ_1): $x=-\frac{a}{e}$.

- Ứng với $F_2(c, 0)$ là đường chuẩn

  (Δ_2): $x=\frac{a}{e}$.



b. Với Hypecbôn (H):

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

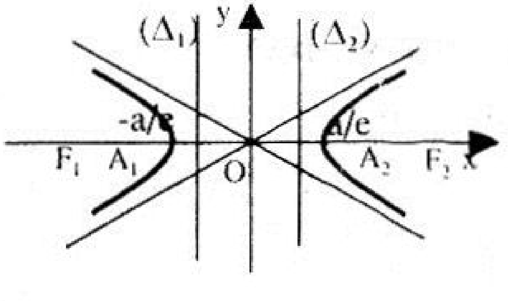
ta có:

- Ứng với $F_1(-c, 0)$ là đường chuẩn

  (Δ_1): $x=-\frac{a}{e}$.

- Ứng với $F_2(c, 0)$ là đường chuẩn

  (Δ_2): $x=\frac{a}{e}$.



Nhắc lại: Với Parabôn (P): $y^2=2px$ có đường chuẩn $x=-\frac{p}{2}$.

Đường chuẩn của cả ba đường Côníc đều có tính chất chung sau đây:

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để một điểm nằm trên đường Côníc là khoảng cách từ điểm đó tới tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai e của đường Côníc đó.

Chứng minh

Với Parbol hiển nhiên là định lý đúng vì theo định nghĩa:

$$M\in(P) \Leftrightarrow MF=d(M, \Delta) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M, \Delta)}=e \ (e=1).$$

Do cách chứng minh đối với Elíp và Hypecbôn tương tự, nên ta chỉ cần chứng minh đối với Elíp và do tính đối xứng của Elíp ta chỉ cần xét tiêu điểm F_2 và đường chuẩn (Δ_2).

Trong mặt phẳng Oxy xét Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a>b$$

có tiêu điểm $F_2(c, 0)$ và đường chuẩn (Δ_2): $x = \frac{a}{e}$.

- *Điều kiện cần:*

Giả sử $M(x, y) \in (E)$

$$\Leftrightarrow MF_2 = a - ex \text{ và } d(M, \Delta_2) = \frac{a}{e} - x \Rightarrow \frac{MF_2}{d(M,(\Delta_2))} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = e.$$

- *Điều kiện đủ:*

Giả sử $\frac{MF_2}{d(M,(\Delta_2))} = e$ khi đó:

$$MF_2^2 = e^2 d^2(M, \Delta_2) \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow M(x, y) \in (E).$$

Từ định lý trên ta có định nghĩa chung của ba đường Côníc như sau:

Định nghĩa 2: Đường Côníc $(\mathscr{C})$ là tập hợp điểm có tỷ số các khoảng cách từ đó đến một điểm cố định và đến một đường thẳng cố định không đi qua điểm cố định ấy, bằng một hằng số dương e.

Hằng số dương e chính là tâm sai của đường Côníc $(\mathscr{C})$.

- Nếu $e<1$: $(\mathscr{C})$ là Elíp.
- Nếu $e=1$: $(\mathscr{C})$ là Parabôn.
- Nếu $e>1$: $(\mathscr{C})$ là Hypecbôn.

Bài toán 1: CMR đường cong $(\mathscr{C})$: $f(x, y, m)=0$ là một Côníc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi $f(x, y, m)=0$ về dạng:

$$\frac{FM}{d(M,\Delta)} = e$$

trong đó F là điểm cố định, $M(x, y)$ và (Δ) là đường thẳng.

Bước 2: Khẳng định được rằng f(x, y, m)=0 chính là phương trình của một Côníc và bằng cách biện luận theo giá trị của e ta được dạng của Côníc đó.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi f(x, y, m)=0 về dạng:

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C.$$

Bước 2: Biện luận theo A, B, C ta được dạng của đường cong.

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biện luận theo m hình dạng của đường $(\mathscr{C})$ có phương trình:

$$(\mathscr{C}): (m-1)x^2+my^2=m^2-m.$$

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình của $(\mathscr{C})$ về dạng:

$$m[(x-1)^2+y^2]=(x-m)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-m|}=\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy với điểm F(1, 0) và đường thẳng (Δ): x=m, ta có nhận xét:

- Với m<0, thì $(\mathscr{C})$ là tập $\varnothing$.
- Với m=0, thì $(\mathscr{C})$: $x^2=0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: x=0 là phương trình trục Oy.
- Với

$$\begin{cases} m>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}}<1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$$

thì $(\mathscr{C})$ là phương trình của Elíp.

- Với

$$\begin{cases} m>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}}>1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$$

thì $(\mathscr{C})$ là phương trình của Hypecbôn.

- Với

$$\begin{cases} m>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

thì $(\mathscr{C})$ là phương trình của Parabôn điểm (có dạng $y^2=0$).

Cách 2: Ta xét dựa trên các tính chất đại số:

a. Với $m^2-m=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=1$

- Với m=0, ta được:

  $(\mathscr{C})$: $-x^2=0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: x=0 là phương trình trục Oy.

- Với m=1, ta được:

  $(\mathscr{C})$: $y^2=0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: $y=0$ là phương trình trục Ox.

b. Với $m^2-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0 \wedge m\neq 1$

$$(\mathscr{C}): \frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1.$$

- Với

$$\begin{cases} m>0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$$

thì $(\mathscr{C})$ là phương trình của Elíp.

- Với

$$m(m-1)<0 \Leftrightarrow 0<m<1$$

thì $(\mathscr{C})$ là phương trình của Hypecbôn.

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$m^2x^2+(m^2-9)y^2+18my-9m^2=0, \text{ với } m>0$$

là phương trình của một Côníc. Biện luận theo m hình dạng của Côníc đó.

Bài tập 2: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ax^2+By^2+F=0, \text{ với } AF<0.$$

a. Là phương trình của một đường tròn có tâm O(0, 0) nếu A=B.

b. Là phương trình của một Elíp có đỉnh O(0, 0) nếu A≠B và A.B>0. Tìm toạ độ các tiêu điểm, phương trình các đường chuẩn của Elíp.

c. Là phương trình của một Hypecbôn có đỉnh O(0, 0) nếu A≠B và A.B<0. Tìm toạ độ các tiêu điểm, phương trình các đường chuẩn của Hypecbôn.

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0, \text{ với } A.B>0$$

a. Là phương trình của một Elíp nếu $A.(\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E)>0$. Tìm toạ độ các tiêu điểm, phương trình các đường chuẩn của Elíp.

b. Là phương trình của một Hypecbôn nếu $A.(\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E)<0$. Tìm toạ độ các tiêu điểm, phương trình các đường chuẩn của Hypecbôn.

c. Là một điểm nếu $\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E=0$.

Bài tập 4: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0, \text{ với } A\neq 0$$

a. Là phương trình của một Parabôn nếu C≠0.

b. Là phương trình của một đường thẳng nếu C=0 và $B^2-4AD=0$.

c. Là phương trình của hai đường thẳng nếu C=0 và $B^2-4AD>0$.

d. Là tập rỗng nếu $C=0$ và $B^2-4AD<0$.

Bài tập 5: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ay^2+By+Cx+D=0, \text{ với } A\neq 0$$

a. Là phương trình của một Parabôn nếu $C\neq 0$.

b. Là phương trình của một đường thẳng nếu $C=0$ và $B^2-4AD=0$.

c. Là phương trình của hai đường thẳng nếu $C=0$ và $B^2-4AD>0$.

d. Là tập rỗng nếu $C=0$ và $B^2-4AD<0$.

Bài tập 6: Chứng tỏ rằng phương trình:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

a. Là phương trình của một Elíp nếu $B^2-AC<0$.

b. Là phương trình của một Hypecbôn nếu $B^2-AC>0$.

c. Là phương trình của một Parabôn nếu $B^2-AC=0$.

d. Là phương trình của một đường tròn nếu $B=0$ và $A=C\neq 0$.

e. Là phương trình của một Elíp hoặc Hypecbôn có trục cùng phương với trục toạ độ nếu $B=0$ và $AC\neq 0$ và $A\neq C$.

f. Là phương trình của hai đường thẳng nếu (1) có nghiệm y là phương trình bậc nhất theo x.

Bài toán 2: Lập phương trình của một Côníc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nếu biết tâm sai e, một tiêu điểm F_i, và đường chuẩn (Δ_i) ứng với tiêu điểm đó thì ta sử dụng tính chất:

$$M(x, y)\in(E) \Leftrightarrow \frac{MF_i}{d(M,\Delta_i)}=e,\ i=1, 2.$$

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập phương trình chính tắc của Côníc (C) có tâm sai $e=\frac{1}{2}$, một tiêu điểm là $F(-3, 1)$ và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là (Δ): $y+2=0$.

Giải

Với $M(x, y)\in(E)$

$$\Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,\Delta)}=e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}}{|y+2|}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4[(x+3)^2+(y-1)^2]=(y+2)^2 \Leftrightarrow 4x^2+3y^2+24x-12y+36=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{8/3}=1.$$

Đó chính là phương trình của Elíp (E).

Ví dụ 2: Lập phương trình chính tắc của Parabôn, biết tiêu điểm F(0, 2), đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó có phương trình 3x-4y-12=0.

Giải

Với $M(x, y)\in(P)$

$$\Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,\Delta)}=1 \Leftrightarrow MF^2=d^2(M, (\Delta))$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=\frac{(3x-4y-12)^2}{25} \Leftrightarrow 16x^2+9y^2+24xy+72x-196y-44=0.$$

Đó chính là phương trình của Parabôn (P).

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Lập phương trình chính tắc từ đó suy ra phương trình tham số của Elíp (E), biết:

a. Tâm O, tiêu điểm đều ở trên Ox, đi qua điểm $M(-\sqrt{3}, 1)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 6.

b. Tâm sai $e=\frac{2}{3}$, một tiêu điểm F(2, 1) và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là (Δ): 3x-4y-12=0.

Bài tập 2: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn, biết tiêu điểm F(2, -3), đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó có phương trình 3x-y+3=0 và tâm sai $e=\sqrt{5}$.

Bài tập 3: Lập phương trình chính tắc của Hypecbôn biết tâm sai e=2, một tiêu điểm F(1, 1) và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là (Δ): x-y-2=0.

Bài tập 4: Lập phương trình chính tắc của Parabôn (P) biết tiêu điểm là O và đường chuẩn (d): x-y-2=0.

Bài toán 3: Sử dụng phương trình đường chuẩn của các đường Côníc để giải toán.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả trong định nghĩa 1.

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): 4x^2+16y^2=64.$$

a. Xác định các tiêu điểm F_1, F_2, tâm sai và vẽ Elíp.

b. M là một điểm bất kỳ trên Elíp. Chứng tỏ rằng tỷ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm phải F_2 và tới đường thẳng $x=\frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

c. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2+4x\sqrt{3}-4=0$. Xét đường tròn (C_1) di động nhưng luôn đi qua tiêu điểm phải F_2 và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C). Chứng tỏ rằng các tâm N của đường tròn (C_1) nằm trên một Hypecbôn cố định. Viết phương trình Hypecbôn.

Giải

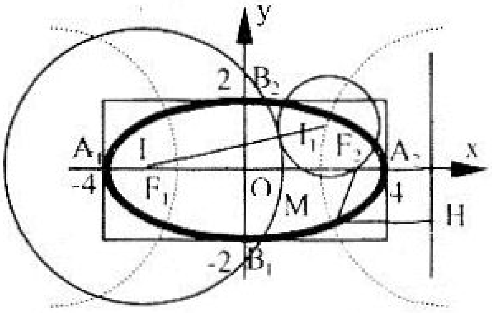
a. Chuyển phương trình Elíp về dạng chính tắc, ta được

$$(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

suy ra a=4, b=2 và c=$2\sqrt{3}$.

Từ đó:

- Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{12}, 0)$, $F_2(\sqrt{12}, 0)$
- Tâm sai $e=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Để vẽ Elíp (E) ta sử dụng hình chữ nhật cơ sở có tâm O kích thước là 8, 4.

b. Ta biết rằng ứng với tiêu điểm $F_2(\sqrt{12}, 0)$ là đường chuẩn (Δ_2): $x=\frac{8}{\sqrt{3}}$, do đó:

$$\frac{MF_2}{d(M,(\Delta_2))}=e=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ không đổi.}$$

c. Chuyển phương trình đường tròn (C) về dạng chính tắc :

$$(C): (x+2\sqrt{3})^2+y^2=16.$$

Vậy (C) có tâm $I(-2\sqrt{3}, 0)$ và bán kính R=4.

Xét đường tròn (C_1) có tâm $I_1(x_1, y_1)$, bán kính R_1, có dạng:

$$(C_1): (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R_1^2.$$

Điểm $F_2 \in (C_1)$ suy ra

$$(\sqrt{12}-x_1)^2+y_1^2=R_1^2 \qquad (1)$$

(C_1) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$R+R_1=II_1 \Leftrightarrow R_1=\sqrt{(2\sqrt{3}+x_1)^2+y_1^2}-4. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$(\sqrt{12}-x_1)^2+y_1^2=\left(\sqrt{(2\sqrt{3}+x_1)^2+y_1^2}-4\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{8}=1.$$

Vậy, tâm đường tròn (C_1) thuộc Hypecbôn

$$(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1.$$

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

a. Tính độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.

b. Tính khoảng cách từ tiêu điểm đến các tiệm cận.

c. Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm tới các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn.

Bài tập 2: Tính góc α ($0<\alpha\leq 90^0$) giữa các đường tiệm cận của Hypebôn, biết khoảng cách giữa các tiêu điểm gấp 2 lần khoảng cách giữa các đường chuẩn.

3. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

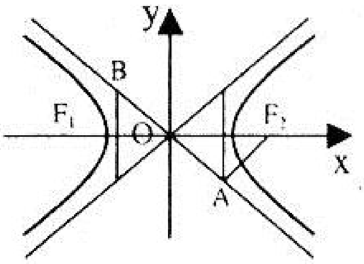
$$y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx+ay=0 \\ bx-ay=0 \end{array}\right..$$

Phương trình hai đường chuẩn của (H) là: $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

a. Gọi A, B là giao điểm của tiệm cận bx-ay=0 với đường chuẩn. Khi đó:

- Toạ độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} bx-ay=0 \\ x=\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \Leftrightarrow A(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}).$$



- Toạ độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} bx-ay=0 \\ x=-\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \Leftrightarrow B(-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}).$$

Do đó:

$$AB^2=(-\frac{a^2}{c}-\frac{a^2}{c})^2+(-\frac{ab}{c}-\frac{ab}{c})^2=4\frac{a^4}{c^2}+4\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2(a^2+b^2)}{c^2}=4a^2$$

$\Leftrightarrow AB=2a$.

b. Từ tính đối xứng của (H) ta chỉ cần tính khoảng cách từ tiêu điểm $F_2(c, 0)$ đến tiệm cận bx-ay=0. Khoảng cách đó được xác định bởi:

$$h=\frac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}}=b.$$

c. CMR chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm tới các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn $\Leftrightarrow$ CMR $AF_2\perp AO$.

Thật vậy:

$$\overrightarrow{AF_2}\,(c-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}) \text{ và } \overrightarrow{AO}\,(-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c})$$

suy ra:

$$\overrightarrow{AF_2}.\overrightarrow{AO}=(c-\frac{a^2}{c})(-\frac{a^2}{c})+\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{(a^2-c^2)a^2+a^2b^2}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}(a^2-c^2+b^2)=0$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF_2}\perp\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow AF_2\perp AO$

$\Leftrightarrow$ A là hình chiếu của F_2 lên tiệm cận bx-ay=0.

II.TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CÔNÍC

Định lý 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường Côníc $(\mathscr{C})$ và đường thẳng (d): Ax+By+C=0. Điều kiện cần và đủ để (d) tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ là:

Phương trình của $(\mathscr{C})$	**Điều kiện cần và đủ để (d) tiếp xúc với $(\mathscr{C})$**
Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$A^2a^2+B^2b^2=C^2$
Hypecbôn (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$A^2a^2-B^2b^2=C^2$ với điều kiện $A^2a^2+B^2b^2>0$
Parabôn (P): $y^2=2px$	(d): $B^2p=2AC$

CHỨNG MINH

Ta chỉ chứng minh trong trường hợp $(\mathscr{C})$ là Elíp (*Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự*):

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (E) là:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 & (1) \\ Ax+By+C=0 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Vì $A^2+B^2>0$ nên $A\neq0$ hoặc $B\neq0$, không mất tính tổng quát, giả sử $B\neq0$. Khi đó rút y từ (2) thay vào (1), ta được:

$$B^2b^2x^2+a^2(-Ax-C)^2=a^2b^2B^2$$

$$\Leftrightarrow (B^2b^2+A^2a^2)x^2+2a^2ACx+a^2C^2-a^2b^2B^2=0. \qquad (3)$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (E)

$\Leftrightarrow$ hệ (I) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow (a^2AC)^2-(B^2b^2+A^2a^2)(a^2C^2-a^2b^2B^2)=0$

$\Leftrightarrow C^2=A^2a^2+B^2b^2$, đpcm.

Nhận xét:

1. Mặc dù trong lời giải trên vai trò x, y là bình đẳng, nhưng sự bình đẳng này không được xem xét một cách đầy đủ trong suốt quá trình giải. Vì vậy, theo hướng trên ta nhận được một lời giải đúng nhưng không đẹp.

Để khắc phục tình trạng trên, chúng ta sử dụng phương pháp sau:

Viết lại hệ (I) dưới dạng:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \\ aA\left(\frac{x}{a}\right)+bB\left(\frac{y}{b}\right)+C=0 \end{cases}$$

Đặt $X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$, ta được:

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \ (T) \\ aAX+bBY+C=0 \ (\Delta) \end{cases}$$

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đường tròn (T)

$\Leftrightarrow d(O, \Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}}=1 \Leftrightarrow C^2=A^2a^2+B^2b^2$, đpcm.

2. Như vậy ta có được một lời giải hoàn toàn mới. Trong lời giải trên, sự bình đẳng của x, y được duy trì trong suốt quá trình giải. Việc đặt ẩn mới $X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$ đã chuyển bài toán xét tiếp tuyến của Elíp về xét tiếp tuyến của đường tròn. Ý tưởng này thực chất được xuất phát từ tính chất của phép co f trục Ox tỉ số $k=\pm\frac{a}{b}$, cụ thể:

" *Nếu đường thẳng (d): $Ax+By+C=0$ là tiếp tuyến của Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ thì đường thẳng (d_1): $Ax+B(\pm\frac{b}{a}y)+C=0$ là tiếp tuyến của đường tròn (C): $x^2+y^2=a^2$.* "

Định lý 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường Côníc $(\mathscr{C})$, phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc $(\mathscr{C})$ tương ứng với các dạng của phương trình $(\mathscr{C})$ như sau:

Phương trình của $(\mathscr{C})$	**Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại $M(x_0, y_0)\in(\mathscr{C})$**
Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(d): $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$
Hypecbôn (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(d): $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$
Parabôn (P): $y^2=2px$	(d): $yy_0=p(x+x_0)$

CHỨNG MINH

Ta chỉ chứng minh trong trường hợp $(\mathscr{C})$ là Elíp (*Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự*):

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

- Điểm $M_0(x_0, y_0)\in$ (E) suy ra:

$$\frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1. \quad (1)$$

- Đường thẳng (d) đi qua $M_0(x_0, y_0)$ có phương trình:

  (d): $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, với $A^2+B^2>0$

  $\Leftrightarrow$ (d): $Ax+By-Ax_0-By_0=0$ (2)

- Đường thẳng (d) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi:

  $A^2a^2+B^2b^2=(Ax_0+By_0)^2$. (3)

Xét hệ phương trình tạo bởi (1) và (3), ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2}=\dfrac{A}{Ax_0+By_0} \\ \dfrac{y_0}{b^2}=\dfrac{B}{Ax_0+By_0} \end{cases}. \qquad (I)$$

Khi đó bằng việc viết lại (d) dưới dạng:

$$(d): \frac{Ax}{Ax_0+By_0}+\frac{By}{Ax_0+By_0}=1 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} (d): \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Đối với Elíp (E) dựa trên kết quả trên cùng với phép co f trục Ox tỉ số $k=\pm\frac{a}{b}$ chúng ta có thể giải được bài toán:

" *Cho Elíp (E):* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *(0<b<a) có các đỉnh trên trục lớn là* A_1, A_2 *và các đỉnh trên trục nhỏ là* B_1, B_2. *Điểm M di động trên (E) và không trùng với các đỉnh của (E). CMR trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các* ΔMA_1A_2 *và* ΔMB_1B_2 *tiếp xúc với (E).* "

Bài toán 1: Lập phương trình tiếp tuyến của đường Côníc $(\mathscr{C})$ thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa trên điều kiện K ta giả sử được đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $Ax+By+C=0$.

Bước 2: Xác định điều kiện tiếp xúc của (d) và $(\mathscr{C})$.

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

Chú ý: Điều kiện K thường gặp:

1. Tiếp tuyến đi qua điểm M cho trước, khi đó:
   a. Nếu $M(x_0, y_0)\in(\mathscr{C})$, ta có ngay phương trình tiếp tuyến bằng phương pháp phân đôi toạ độ.
   b. Nếu $M(x_0, y_0)\notin(C)$, ta giả sử:

      (d): $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$ (d): $Ax+By-Ax_0-By_0=0$
2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$, khi đó:

   (d): $Ax+By+\underline{D}=0$.
3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$, khi đó:

   (d): $Bx-Ay+\underline{D}=0$.
4. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng k, khi đó:

   (d): $y=kx+\underline{m} \Leftrightarrow$ (d): $kx-y+\underline{m}=0$.

5. Tiếp tuyến tạo với đường thẳng (Δ) một góc α, khi đó ta linh hoạt sử dụng một trong hai công thức:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$, với $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d), (Δ).

$$\text{tg}\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$$, với k_1, k_2 theo thứ tự là hsg của (d), (Δ)

Cách 2: Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi toạ độ để giải.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): f(x, x_0, y, y_0)=0. \qquad (1)$$

Điểm $M\in(\mathscr{C})$

$$\Leftrightarrow f(x_0, y_0)=0 \qquad (2)$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K của giả thiết, ta thiết lập thêm một phương trình theo x_0, y_0. (3)

Bước 3: Giải hệ tạo bởi (2), (3) ta được toạ độ tiếp điểm $M(x_0, y_0)$, từ đó thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến cần xác định.

Chú ý:

1. Trong những trường hợp riêng cách 2 tỏ ra hiệu quả hơn.
2. Đối với Elíp ta còn có thể sử dụng phương pháp *họ tiếp tuyến*, như sau:

Với Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Bước 2: Vì $M\in(E) \Rightarrow M(a\sin t, b\cos t)$.

Bước 3: Khi đó phương trình tiếp tuyến của (E) tại điểm M có dạng:

$$(d_t): \frac{x}{a}\sin t+\frac{y}{b}\cos t=1.$$

3. Đối với Hypecbôn ta cũng có thể sử dụng phương pháp *họ tiếp tuyến*, như sau:

Với Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình Hypecbôn về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\,\text{tg}t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Bước 2: Điểm $M \in (H) \Rightarrow M(\frac{a}{\cos t}, btgt)$.

Bước 3: Khi đó phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm M có dạng:

$$(d_1): \frac{x}{a.\cos t} - \frac{y.tgt}{b} = 1 \Leftrightarrow (d_1): bx-ay.sint=ab.cost.$$

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm M(1, 2). Lập phương trình tiếp tuyến của Côníc $(\mathscr{C})$ đi qua M, biết:

a. $(\mathscr{C}): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1.$ b. $(\mathscr{C}): x^2 - \frac{y^2}{2} = -1.$

Giải

a. Nhận xét rằng $M \in (\mathscr{C})$, do đó phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): \frac{x.1}{2} + \frac{y.2}{8} = 1 \Leftrightarrow (d): 2x+y-4=0.$$

b. Nhận xét rằng $M \in (\mathscr{C})$, do đó phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): x.1 - \frac{y.2}{2} = -1 \Leftrightarrow (d): x-y+1=0.$$

Ví dụ 2: Cho điểm M(3, -4) và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a. CMR qua M có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến (E).

b. Xác định phương trình 2 tiếp tuyến và lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của (E) với hai tiếp tuyến trên.

Giải

a. Điểm M(3, -4), suy ra:

$$P_{M/(E)} = \frac{9}{9} + \frac{16}{4} > 1 \Leftrightarrow \text{M nằm ngoài Elíp}$$

$\Rightarrow$ qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến (E).

b. Ta lựa chọn một trong ba cách giải sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$$(d): A(x-3)+B(y+4)=0 \Leftrightarrow (d): Ax+By-3A+4B=0.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (E)

$$9A^2+4B^2=(-3A+4B)^2 \Leftrightarrow 12B^2-24AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=2A \end{array}\right.$$

- Với B=0, ta được tiếp tuyến

$$(d_1): A(x-3)=0 \Leftrightarrow (d_1): x-3=0$$

và toạ độ tiếp điểm M_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M_1(3, 0).$$

- Với B=2A, ta được tiếp tuyến

  (d_2): $A(x-3)+2A(y+4)=0 \Leftrightarrow (d_2)$: $x+2y+5=0$

và toạ độ tiếp điểm M_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ x+2y+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{9}{5}\\ y=-\frac{8}{5}\end{cases} \Rightarrow M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}).$$

- Phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2 là:

$$(M_1M_2): \begin{cases}\text{qua } M_1(3,0)\\ \text{qua } M_2(-\frac{9}{5},-\frac{8}{5})\end{cases} \Leftrightarrow (M_1M_2): x-3y-3=0.$$

Cách 2: Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của (E) với tiếp tuyến (d) cần tìm, ta được:

$$M_0(x_0, y_0)\in(E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1 \qquad (1)$$

$$(d): \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1 \qquad (2)$$

Vì $M\in(d)$ nên :

$$\frac{x_0}{3}-y_0=1 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow x_0=3y_0+3 \overset{(1)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l}M_1(3,0)\\ M_2(-\frac{9}{5},-\frac{8}{5})\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(d_1): x-3=0\\ (d_2): x+2y+5=0\end{array}\right..$$

Nhận xét rằng toạ độ hai tiếp điểm đều thoả mãn (*), do đó phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm có dạng:

$$\frac{x}{3}-y=1 \Leftrightarrow x-3y-3=0.$$

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (E) có dạng:

$$\frac{x}{3}\sin t+\frac{y}{2}\cos t=1. \qquad (1)$$

Do điểm $M(3, -4)\in(d_t)$

$$\Leftrightarrow \sin t-2\cos t=1 \Leftrightarrow \sin t=1+2\cos t$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases}\sin t=1+2\cos t\\ (1+2\cos t)^2+\cos^2 t=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin t=1+2\cos t\\ 5\cos^2 t+4\cos t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin t=1+2\cos t\\ \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \cos t=-\frac{4}{5}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=0 \text{ và } \sin t=1\\ \cos t=-\frac{4}{5} \text{ và } \sin t=-\frac{3}{5}\end{array}\right.,$$

- Với sint=1 và cost=0, thay vào (1) được tiếp tuyến

  (d_1): x-3=0 và toạ độ tiếp điểm là $M_1(3, 0)$.

- Với sint=$-\frac{4}{5}$ và cost=$-\frac{3}{5}$, thay vào (1) được tiếp tuyến

  (d_2): x+2y+5=0 và toạ độ tiếp điểm là $M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$.

- Phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2 là:

$$(M_1M_2): \begin{cases} \text{qua } M_1(3,0) \\ \text{qua } M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}) \end{cases} \Leftrightarrow (M_1M_2): x-3y-3=0.$$

Nhận xét: Như vậy, với đòi hỏi của bài toán việc lựa chọn cách giải 2 sẽ nhận được lời giải đơn giản.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng (Δ) và Parabôn (P) có phương trình:

(Δ): 2x-y-1=0 và (P): $y^2=2x$.

a. Lập phương trình tiếp tuyến của Parabôn (P) vuông góc với (Δ).

b. Gọi M là tiếp điểm của (P) với tiếp tuyến (d), hãy lập phương trình đường tròn tâm M và tiếp xúc với đường thẳng (Δ).

Giải

a. Ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Tiếp tuyến $(d)\perp(\Delta)$ có phương trình:

(d): x+2y+C=0.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (P)

$\Leftrightarrow 1.(-2)^2-2.1.C=0 \Leftrightarrow C=2.$

- Với C=2, ta được tiếp tuyến (d): x+2y+2=0.
- Toạ độ tiếp điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x+2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(2, -2).$$

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y.y_0=x+x_0 \Leftrightarrow (d): x-y_0.y+x_0=0 \quad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0)\in(P)$

$$\Leftrightarrow y_0^2=2x_0. \quad (2)$$

Đường thẳng $(d)\perp(\Delta)$ khi và chỉ khi:

$$1.2-y_0.(-1)=0 \Leftrightarrow y_0=-2 \overset{(2)}{\Rightarrow} x_0=2 \text{ và } M(2, -2).$$

- Với M(2, -2), thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d): x+2y+2=0.

b. Đường tròn (C) thoả mãn điều kiện đầu bài có bán kính R được cho bởi:

$$R=d(M, (\Delta))=\frac{|2.2+2-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) được cho bởi:

$$(C): \begin{cases} \text{Tam } M(2,-2 \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-2)^2+(y+2)^2=5.$$

Nhận xét: Như vậy thông qua các ví dụ trên chúng ta đã biết cách lập phương trình tiếp tuyến đối với một Cônic có dạng chính tắc. Một câu hỏi được đặt ra rất tự nhiên là " *Với các Cônic có các trục song song với các trục toạ độ thì sử dụng phương pháp gì ?* ", câu trả lời là lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Tìm toạ độ tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi toạ độ để giải.

Cách 2: Thực hiện phép tịnh tiến để đưa chúng về dạng chính tắc.

Để minh hoạ chúng ta sẽ xét các ví dụ sau:

Ví dụ 4: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d_1) có phương trình:

$$(P): y=x^2-2x+3 \text{ và } (d_1): y=2x$$

Đường thẳng (d) là đường thẳng cùng phương với đường thẳng (d_1) sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

a. Lập phương trình của (d) khi hai tiếp tuyến của (P) tại A và B vuông góc với nhau.

b. Lập phương trình của (d) khi độ dài AB=40.

Giải

Đường thẳng (d) cùng phương với (d_1): $y=2x$, có dạng: (d):$y=2x+m$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P)

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=2x+m \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+3-m=0 \qquad (1)$$

Để $(d)\cap(P)=\{A, B\}$ $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Rightarrow 4-3+m>0 \Leftrightarrow m>-1. \qquad (2)$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ của A, B và thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A+x_B=4 \\ x_A.x_B=3-m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_A=2x_A+m \\ y_B=2x_B+m \end{cases}.$$

a. Ta có:

Điểm $A\in(P) \Rightarrow$ tiếp tuyến tại A có hệ số góc là $k_A=2x_A-2$.

Điểm $B\in(P) \Rightarrow$ tiếp tuyến tại B có hệ số góc là $k_B=2x_B-2$.

Hai tiếp tuyến của (P) tại A và B vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow k_A.k_B=-1 \Leftrightarrow (2x_A-2).(2x_B-2)=-1 \Leftrightarrow 4x_Ax_B-4(x_A+x_B)+4=-1$$

$$\Leftrightarrow 4(3-m)-16+4=-1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{4} \text{ (thoả mãn điều kiện (2)).}$$

Vậy, đường thẳng (d): $y=2x+\frac{1}{4}$.

b. Ta có:

$AB=40$

$$\Leftrightarrow 1600=AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(x_A-x_B)^2+(2x_A-2x_B)^2$$

$$=5(x_A-x_B)^2=5[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B]=5[16-4(3-m)]=20(1+m).$$

$\Leftrightarrow m=79$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng:

(d): $y=2x+79$.

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến:

a. Đi qua điểm A(3, 0).
b. Đi qua điểm B(2, 3).
c. Song song với đường thẳng (Δ_1): $x-2y+6=0$.
d. Vuông góc với đường thẳng (Δ_2): $x-y=0$.
e. Tạo với đường thẳng (Δ_3): $2x-y=0$ một góc bằng 60^0.

Bài tập 2: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (H), biết tiếp tuyến:

a. Đi qua điểm A(3, 0).
b. Đi qua điểm B(3, 2).
c. Song song với đường thẳng (Δ_1): $x-y+1=0$.
d. Vuông góc với đường thẳng (Δ_2): $x-2y+3=0$.
e. Tạo với đường thẳng (Δ_3): $x-2y-4=0$ một góc bằng 45^0.

Bài tập 3: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): y^2=2x.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến:

a. Đi qua điểm A(2, 2).
b. Đi qua điểm B(2, 3).
c. Song song với đường thẳng (Δ_1): $3x-4y+1=0$.
d. Vuông góc với đường thẳng (Δ_2): $4x-3y+7=0$.
e. Tạo với đường thẳng (Δ_3): $2x-y=0$ một góc bằng 60^0.

Bài tập 4: Cho điểm M(-2, 9) và Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1.$$

Lập phương trình tiếp tuyến của Hypecbôn (H) đi qua điểm M.

Bài toán 2: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d): $Ax+By+C=0$, với $A^2+B^2>0$ là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

Bước 2: Thiết lập điều kiện tiếp xúc của (d) với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến chung (d).

Chú ý. Với bài toán tiếp tuyến chung của đường tròn, Elíp và Hypebôn với một đường Côníc khác ta còn có thể sử dụng phương pháp *họ tiếp tuyến.*

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập phương trình tiếp tuyến chung của:

$$(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ và } (C): x^2+y^2=5.$$

Giải

Đường tròn (C) có tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có thể thực hiện bằng ba cách sau:

Cách 1: Giả sử phương trình tiếp tuyến chung là:

$$(d): Ax+By+C=0, \text{ với } A^2+B^2>0.$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi

$$4A^2+9B^2=C^2 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi

$$d(O, (d))=R \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow C^2=5(A^2+B^2). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$4A^2+9B^2=5(A^2+B^2) \Leftrightarrow A=\pm 2B \overset{(3)}{\Rightarrow} C=\pm 5B.$$

- Với A=2B và C=5B, ta được tiếp tuyến (d_1): $2x+y+5=0$.
- Với A=2B và C=-5B, ta được tiếp tuyến (d_2): $2x+y-5=0$.
- Với A=-2B và C=5B , ta được tiếp tuyến (d_3): $2x-y-5=0$.
- Với A=-2B và C=-5B, ta được tiếp tuyến (d_4): $2x-y+5=0$.

Vậy (E) và (C) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

Cách 2: Họ tiếp tuyến (d_t) của (C) có dạng:

$$(d_t): x.\sin t+y.\cos t=\sqrt{5}, \ t\in[0, 2\pi).$$

Đường thẳng (d_t) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi

$$4\sin^2t+9\cos^2t=5 \Leftrightarrow 5\cos^2t=1 \Leftrightarrow \cos t=\pm\frac{1}{\sqrt{5}} \overset{\sin^2t+\cos^2t=1}{\Rightarrow} \sin t=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Với $\cos t=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin t=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được tiếp tuyến (d_1): $2x+y+5=0$.
- Với $\cos t=\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin t=\frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $2x+y-5=0$.
- Với $\cos t=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin t=\frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $2x-y-5=0$.
- Với $\cos t=\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin t=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, ta được tiếp tuyến (d_4): $2x-y+5=0$.

Vậy (E) và (C) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (E) có dạng:

$$(d_t):\ \frac{x}{2}.\sin t+\frac{y}{3}.\cos t=1,\ t\in[0,\ 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (d_t):\ 3x.\sin t+2y.\cos t-6=0,\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Đường thẳng (d_t) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi

$$d(O,\ (d_t))=R \Leftrightarrow \frac{|6|}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 9\sin^2 t+4\cos^2 t=\frac{36}{5} \Leftrightarrow 5\sin^2 t=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \sin t=\pm\frac{4}{5}$$

$$\overset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{\Rightarrow} \quad \cos t=\pm\frac{3}{5}.$$

- Với $\sin t=-\frac{4}{5}$ và $\cos t=-\frac{3}{5}$, ta được tiếp tuyến (d_1): $2x+y+5=0$.
- Với $\sin t=\frac{4}{5}$ và $\cos t=\frac{3}{5}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $2x+y-5=0$.
- Với $\sin t=\frac{4}{5}$ và $\cos t=-\frac{3}{5}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $2x-y-5=0$.
- Với $\sin t=-\frac{4}{5}$ và $\cos t=\frac{3}{5}$, ta được tiếp tuyến (d_4): $2x-y+5=0$.

Vậy (E) và (C) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

Ví dụ 2: Lập phương trình tiếp tuyến chung của:

$$(E):\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ và } (H):\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{27}=1.$$

Giải

Ta có thể thực hiện bằng ba cách sau:

Cách 1: Giả sử phương trình tiếp tuyến chung là:

$$(d):\ Ax+By+C=0,\ \text{với } A^2+B^2>0.$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi

$$8A^2-27B^2=C^2. \tag{1}$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi

$$4A^2+9B^2=C^2. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$8A^2-27B^2=4A^2+9B^2 \Leftrightarrow A=\pm3B \overset{(3)}{\Rightarrow} C=\pm3B\sqrt{5}.$$

- Với $A=3B$ và $C=3B\sqrt{5}$, ta được tiếp tuyến (d_1): $3x\ \ y+3\sqrt{5}=0$.
- Với $A=3B$ và $C=-3B\sqrt{5}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $3x+y-3\sqrt{5}=0$.
- Với $A=-3B$ và $C=3B\sqrt{5}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $3x-y-3\sqrt{5}=0$.
- Với $A=-3B$ và $C=-3B\sqrt{5}$, ta được tiếp tuyến (d_4): $3x-y+3\sqrt{5}=0$.

Vậy (E) và (H) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

Cách 2: Họ tiếp tuyến (d_t) của (E) có dạng:

$$(d_t): \frac{x}{2}\sin t + \frac{y}{3}\cos t = 1,\ t \in [0, 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (d_t): 3x.\sin t + 2y.\cos t = 6,\ t \in [0, 2\pi).$$

Đường thẳng (d_t) tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi

$$8.9\sin^2 t - 27.4\cos^2 t = 36 \Leftrightarrow 2\sin^2 t - 3\cos^2 t = 1$$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 t = 4 \Leftrightarrow \sin t = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

- Với $\sin t = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_1): 3x+y-3\sqrt{5}=0 \text{ và } (d_2): 3x-y-3\sqrt{5}=0.$$

- Với $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_3): 3x-y+3\sqrt{5}=0 \text{ và } (d_4): 3x+y+3\sqrt{5}=0.$$

Vậy (E) và (H) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (H) có dạng:

$$(d_t): \frac{x}{2\sqrt{2}.\cos t} - \frac{y.\text{tg}t}{3\sqrt{3}} = 1,\ t \in [0, 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (d_t): 3x\sqrt{3} - 2y\sqrt{2}.\sin t - 6\sqrt{6}.\cos t = 0,\ t \in [0, 2\pi).$$

Đường thẳng (d_t) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi

$$4.27 + 9.8\sin^2 t = 216\cos^2 t \Leftrightarrow 8\cos^2 t = 5 \Leftrightarrow \cos t = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

- Với $\cos t = \frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \text{tg}t = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_1): 3x+y-3\sqrt{5}=0 \text{ và } (d_2): 3x-y-3\sqrt{5}=0.$$

- Với $\cos t = -\frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \text{tg}t = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_3): 3x-y+3\sqrt{5}=0 \text{ và } (d_4): 3x+y+3\sqrt{5}=0.$$

Vậy (E) và (H) có 4 tiếp tuyến chung là (d_1), (d_2), (d_3) và (d_4).

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Lập phương trình các tiếp tuyến chung của

a. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và (C): $x^2+y^2=9$.

b. (E_1): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (C): $x^2+y^2=4$.

d. (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (C): $(x+2)^2+y^2=4$.

e. (C): $(x+2)^2+y^2=4$ và (P): $y^2=12x$.

f. (H_1): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (H_2): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

g. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

h. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và (P): $y^2=12x$.

i. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (P): $y^2=2x$

j. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và (P): $y^2=2x$.

k. (P_1): $y=x^2+2x+2$ và (P_2): $y=x^2$.

Bài toán 3: CMR tiếp tuyến (d) của Cônic $(\mathscr{C})$ thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (\mathscr{C})$, ta có:

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad (1)$$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M bằng phân đôi tọa độ. (2)

Bước 2: Chứng minh tính chất K dựa vào điều kiện ràng buộc (1).

Cách 2: Sử dụng phương trình tham số đối với Elíp và Hypebôn.

Chú ý: Để bắt đầu, chúng ta phát biểu và chứng minh định lý Pascal (*tính chất quang học và âm học*) cho tiếp tuyến của Elíp.

***Định lý* (Pascal):** Tiếp tuyến của Elíp tạo với hai bán kính qua tiêu điểm ứng với tiếp điểm những góc bằng nhau.

Chứng minh

Xét điểm $M_0(x_0, y_0)$ tuỳ ý trên Elíp, ta có:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

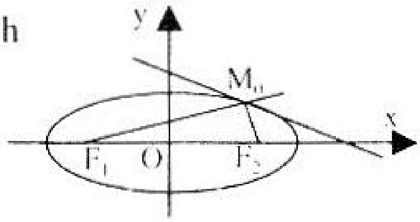
Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (2)$$

- Nếu $M_0(x_0, y_0)$ là một đỉnh của (E) thì hiển nhiên định lý đúng.

- Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ không là đỉnh của (E), tiếp tuyến với (E) tại M_0 cắt Ox tại N. Ta đi chứng minh M_0N là đường phân giác ngoài của góc đỉnh M_0 trong $\Delta F_1M_0F_2$.

Toạ độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình



$$\begin{cases}\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow N(\frac{a^2}{x_0}, 0).$$

Ta có: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, từ đó:

$$\frac{\overline{NF_1}}{\overline{NF_2}}=\frac{-c-\dfrac{a^2}{x_0}}{c-\dfrac{a^2}{x_0}}=\frac{-cx_0-a^2}{cx_0-a^2}=\frac{-ex_0-a}{ex_0-a}=\frac{a+ex_0}{a-ex_0}\Rightarrow\frac{\overline{NF_1}}{\overline{NF_2}}=\frac{F_1M_0}{F_2M_0}.$$

Suy ra M_0N là đường phân giác ngoài của góc đỉnh M_0 trong $\Delta F_1M_0F_2$.

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, với } a>b.$$

CMR tích các khoảng cách từ các tiêu điểm tới một tiếp tuyến bất kỳ của Elíp (E) bằng bình phương độ dài nửa trục nhỏ của Elíp.

Giải

Cách 1: Hai tiêu điểm là $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ với $c^2=a^2-b^2$.

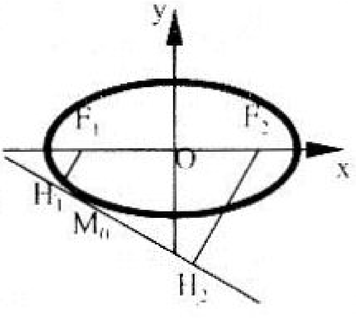
Lấy điểm bất kỳ $M_0(x_0, y_0)\in(E)$, khi đó:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M_0 có dạng:

$$\frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1\Leftrightarrow (d):\ b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0.$$

Khoảng cách F_1H_1 từ F_1 tới (d) được xác định bởi:



$$F_1H_1=\frac{|-b^2x_0c-a^2b^2|}{\sqrt{(b^2x_0)^2+(a^2y_0)^2}}.$$

Khoảng cách F_2H_2 từ F_2 tới (d) được xác định bởi:

$$F_2H_2=\frac{|b^2x_0c-a^2b^2|}{\sqrt{(b^2x_0)^2+(a^2y_0)^2}}.$$

Vậy:

$$F_1H_1.F_2H_2=\frac{|b^4x_0^2c^2-a^4b^4|}{(b^2x_0)^2+(a^2y_0)^2}=\frac{b^2|(b^2x_0^2c^2-a^4b^2)|}{(b^2x_0)^2+(a^2y_0)^2} \qquad (2)$$

Từ (1), ta được:

$$a^2 y_0^2 = a^2b^2 - b^2 x_0^2 \Leftrightarrow a^4 y_0^2 = a^4b^2 - a^2b^2 x_0^2$$

$$\Rightarrow b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2 = b^4 x_0^2 + a^4b^2 - a^2b^2 x_0^2$$

$$= a^4b^2 - b^2 x_0^2 (a^2 - b^2) = a^4b^2 - b^2 x_0^2 c^2. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được

$F_1H_1.F_2H_2 = b^2$ (đpcm).

Chú ý: Nếu ta giả sử phương trình tiếp tuyến (d) có dạng $y=kx+m$ thì không thoả mãn giả thiết "*tiếp tuyến bất kỳ*", trong trường hợp đó cần xét thêm hai tiếp tuyến dạng $x=\pm a$.

Cách 2: Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi). \qquad (1)$$

Lấy điểm $M \in (E)$, ta có: $M(a.\sin t, b.\cos t)$. (2)

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): \frac{x}{a}\sin t + \frac{y}{b}\cos t = 1 \Leftrightarrow (d): bx.\sin t + ay.\cos t - ab = 0.$$

Khi đó với $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$, ta có:

$$h_1 = d(F_1, (d)) = \frac{|-bc\sin t - ab|}{\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}},$$

$$h_2 = d(F_2, (d)) = \frac{|bc\sin t - ab|}{\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}},$$

$$h_1.h_2 = \frac{|b^2(c^2\sin^2 t - a^2)|}{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = \frac{|b^2[(a^2 - b^2)\sin^2 t - a^2]|}{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}$$

$$= \frac{|b^2(b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)|}{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = b^2 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý:

1. Bạn đọc hãy chứng minh thêm hai tính chất sau:
   a. Giả sử F_1H_2 và F_2H_1 cắt nhau tạiN. Chứng minh rằng MN là phân giác của góc F_1MF_2.
   b. Gọi K là hình chiếu vuông góc của F_2 lên MN. Chứng minh rằng H_2K luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên (E).
2. Bạn đọc hãy giải thêm hai câu hỏi quỹ tích sau:
   a. Tìm quỹ tích H_1, H_2.
   b. Từ F_1, F_2 kẻ hai nửa đường thẳng song song cùng chiều cắt (E) tại M, N. Các tiếp tuyến của (E) tại M, N cắt nhau tại P. Chứng minh rằng P chạy trên một đường tròn cố định.

Ví dụ 2: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

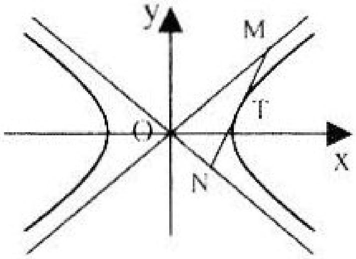
$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Một tiếp tuyến bất kỳ của (H) là (d) tiếp xúc với Hypecbôn tại điểm T. Gọi M, N là các giao điểm của tiếp tuyến (d) với các đường tiệm cận của (H).

a. CMR T là trung điểm của đoạn MN.

b. CMR diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Giải



Cách 1: Lấy điểm $T(x_0, y_0)\in(H)$, ta có:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Phương trình tiếp tuyến tại T có dạng:

$$(d): \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \Leftrightarrow (d): b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2. \quad (2)$$

Toạ độ giao điểm M của (d) và đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right).$$

Toạ độ giao điểm N của (d) và đường tiệm cận $y=-\frac{b}{a}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0+ay_0}\right).$$

a. Nhận xét rằng:

$$x_M+x_N=\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}+\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}=\frac{2a^2b^2x_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\overset{(1)}{=}2x_0$$

$\Leftrightarrow$ T là trung điểm MN.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ với trục Ox. Ta có:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}OM.ON.\sin2\alpha$$

trong đó:

$$OM^2=\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}\right)^2+\left(\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)^2=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(bx_0-ay_0)^2} \qquad (2)$$

$$ON^2=\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}\right)^2+\left(\frac{ab^2}{bx_0+ay_0}\right)^2=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(bx_0+ay_0)^2} \qquad (3)$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{b}{a} \text{ và } \sin2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{a^2b^2(a^2+b^2)}}{bx_0-ay_0}\,\frac{\sqrt{a^2b^2(a^2+b^2)}}{bx_0+ay_0}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}=ab$$

nghĩa là diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Cách 2: Tiếp tuyến (d) của (H) có phương trình:

(d): $Ax+By+C=0$, với $A^2+B^2>0$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với Hypecbôn khi $C^2=A^2a^2-B^2b^2$. (1)

Khi đó toạ độ tiếp điểm T là:

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{a^2AC}{B^2b^2-A^2a^2} \\ y_0=\dfrac{1}{B}\left(\dfrac{a^2A^2}{C}-C\right) \end{cases} \Rightarrow T\left(-\frac{a^2A}{C},\frac{b^2B}{C}\right).$$

Toạ độ giao điểm M của (d) và đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{aC}{aA+bB},-\frac{bC}{aA+bB}\right).$$

Toạ độ giao điểm N của (d) và đường tiệm cận $y=-\frac{b}{a}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{a}x \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{aC}{aA-bB},\frac{bC}{aA-bB}\right).$$

a. Nhận xét rằng:

$$x_M+x_N=-\frac{aC}{aA+bB}-\frac{aC}{aA-bB}=-\frac{2a^2A}{C}=2x_0 \Leftrightarrow \text{T là trung điểm MN.}$$

b. Ta có:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}OM.ON.\sin 2\alpha$$

trong đó:

$$OM^2=\left(-\frac{aC}{aA+bB}\right)^2+\left(-\frac{bC}{aA+bB}\right)^2=\frac{C^2(a^2+b^2)}{(aA+bB)^2} \qquad (2)$$

$$ON^2=\left(-\frac{aC}{aA-bB}\right)^2+\left(-\frac{bC}{aA-bB}\right)^2=\frac{C^2(a^2+b^2)}{(aA-bB)^2} \qquad (3)$$

Gọi α là góc tạo bởi đường tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ với trục Ox, suy ra:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{a} \text{ và } \sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\,\frac{C\sqrt{a^2+b^2}}{aA+bB}\,\frac{C\sqrt{a^2+b^2}}{aA-bB}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}=ab$$

nghĩa là diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Cách 3: Sử dụng họ tiếp tuyến của Hypecbôn (H)

Tiếp tuyến Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{a.\cos t} - \frac{y.tgt}{b} = 1 \Leftrightarrow bx\text{-}ay.\sin t\text{-}ab.\cos t,\ t \in [0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$$

với toạ độ tiếp điểm $T(\frac{a}{\cos t}, btgt)$.

Toạ độ giao điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx - ay.\sin t = ab\cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{a.\cos t}{1 - \sin t} \\ y_M = \dfrac{b.\cos t}{1 - \sin t} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{a.\cos t}{1 - \sin t}, \frac{b.\cos t}{1 - \sin t}).$$

Toạ độ giao điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} bx + ay = 0 \\ bx - ay.\sin t = ab\cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{a.\cos t}{1 + \sin t} \\ y_N = -\dfrac{b.\cos t}{1 + \sin t} \end{cases} \Rightarrow N(\frac{a.\cos t}{1 + \sin t}, -\frac{b.\cos t}{1 + \sin t}).$$

a. Nhận xét rằng:

$$x_M + x_N = \frac{a.\cos t}{1 - \sin t} + \frac{a.\cos t}{1 + \sin t} = \frac{2a}{\cos t} = 2x_T$$

$\Leftrightarrow$ T là trung điểm MN.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$ với trục Ox, ta có:

$$S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} OM.ON.\sin 2\alpha \qquad (1)$$

trong đó:

$$OM^2 = (\frac{a.\cos t}{1 - \sin t})^2 + (\frac{b.\cos t}{1 - \sin t})^2 = \frac{(a^2 + b^2)\cos^2 t}{(1 - \sin t)^2} \qquad (2)$$

$$ON^2 = (\frac{a.\cos t}{1 + \sin t})^2 + (-\frac{b.\cos t}{1 + \sin t})^2 = \frac{(a^2 + b^2)\cos^2 t}{(1 + \sin t)^2} \qquad (3)$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a} \text{ và } \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được:

$$S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}\,|\cos t|}{1 - \sin t} . \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}\,|\cos t|}{1 + \sin t} \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$= ab$$

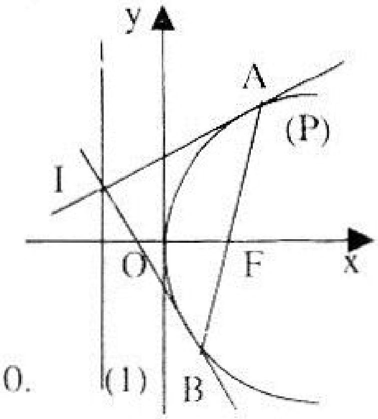
nghĩa là diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Chú ý: Bạn đọc có thể chứng minh thêm tính chất sau:

" Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên (d) và I là giao điểm của F_1E_2 và F_2E_1. Chứng minh rằng $IT \perp (d)$ ".

Ví dụ 3: Cho Parabôn (P). Chứng minh rằng hai tiếp tuyến tại hai đầu mút của dây cung quá tiêu vuông góc với nhau tại một điểm trên đường chuẩn.

Giải



Phương trình đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm F($\frac{p}{2}$, 0) của (P) có dạng:

(d): $2Ax + 2By - pA = 0$.

Toạ độ giao điểm A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) của (P) và (d) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ 2Ax + 2By - pA = 0 \end{cases} \Rightarrow Ay^2 + 2pBy - p^2A = 0. \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = p^2B^2 + A^2p^2 > 0 \Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt y_A, y_B thoả mãn:

$$\begin{cases} y_A + y_B = -\dfrac{2pB}{A} \\ y_A.y_B = -p^2 \end{cases}.$$

Phương trình tiếp tuyến (t_A) của (P) tại điểm A(x_A, y_A) có dạng

(t_A): $y.y_A = p(x+x_A)$,

suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_A = \frac{p}{y_A}$.

Phương trình tiếp tuyến (t_B) của (P) tại điểm B(x_B, y_B) có dạng:

(t_B): $y.y_B = p(x+x_B)$,

suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_B = \frac{p}{y_B}$.

Nhận xét rằng:

$$k_A.k_B = \frac{p}{y_A}.\frac{p}{y_B} = -1 \Leftrightarrow (t_A) \perp (t_B).$$

Vậy hai tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau.

Toạ độ giao điểm I của (t_A) và (t_B) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y.y_A = p(x+x_A) \\ y.y_B = p(x+x_B) \end{cases} \Rightarrow x_I = \frac{x_Ay_B - x_By_A}{y_A - y_B} = \frac{\dfrac{y_A^2}{2p}y_B - \dfrac{y_B^2}{2p}y_A}{y_A - y_B} = -\frac{p}{2}.$$

Vậy hai tiếp tuyến tại A, B cắt nhau tại I thuộc đường chuẩn của (P).

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cho hai điểm M, N trên một tiếp tuyến của Elíp (E), sao cho mỗi tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới một góc vuông. Hãy xác định vị trí của M, N trên tiếp tuyến ấy.

Bài tập 2: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \text{, với } 0 < b < a$$

có 2 tiêu điểm F_1, F_2. Đường thẳng di động (d) luôn đi qua F_2 cắt (E) tại P, Q.

a. Đặt $(Ox, F_2P)=\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Tính độ dài F_2P, F_2Q theo a, b, α.

b. Chứng minh rằng $\frac{1}{F_2P} + \frac{1}{F_2Q}$ không đổi.

c. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn PQ.

d. Đường thẳng F_1P cắt (E) tại $S \neq P$. CMR $\frac{F_2P}{F_2Q} + \frac{F_1P}{F_1S}$ không đổi.

e. Chứng minh rằng đường thẳng SQ luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 3: Cho điểm F(−1, 0) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

$(\Delta): x + 4 = 0.$

a. CMR quỹ tích các điểm M sao cho $\frac{MF}{d(M,(\Delta))} = \frac{1}{2}$ là một Elíp (E).

b. Từ điểm N tuỳ ý trên (Δ) kẻ được hai tiếp tuyến đến (E) và tiếp xúc với (E) tại P và Q. CMR đường thẳng (PQ) đi qua F và xác định vị trí của N để độ dài đoạn PQ nhỏ nhất.

Bài tập 4: Cho hai điểm M(−2, m), N(2, n) và Elíp (E) có phương trình:

$(E): x^2 + 4y^2 = 4.$

a. Gọi A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của Elíp. Hãy viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M và xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

b. Cho MN thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (E). Tìm quĩ tích của điểm I.

Bài tập 5: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

và A(−3, 0), M(−3, m), B(3, 0), N(3, n).

a. Xác định toạ độ giao điểm I của AN và BM.

b. Chứng tỏ rằng để MN tiếp xúc với (E) điều kiện cần và đủ là m, n thoả mãn m.n = 4.

c. Với m, n thay đổi nhưng MN luôn tiếp xúc với (E). Tìm quĩ tích của I.

Bài tập 6: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

F_1, F_2 là các tiêu điểm của nó, A_1, A_2 là các đỉnh thuộc trục lớn của nó, $M\in(E)$, gọi H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên tiếp tuyến với (E) tại M. Gọi (C) là đường tròn đường kính A_1A_2.

a. Chứng minh rằng $H_1, H_2 \in (C)$.

b. Các đường thẳng (H_1F_1), (H_2F_2) cắt (C) theo thứ tự tại các điểm K_1, K_2. Chứng minh rằng $H_1H_2K_2K_1$ là một hình chữ nhật.

Bài tập 7: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a > b.$$

Tiếp tuyến tại M của Elíp (E) cắt đường chuẩn (Δ_2) tại N. CMR tiêu điểm F_2 nhìn MN dưới một góc vuông.

Bài tập 8: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a > b.$$

Tiếp tuyến tại M của Elíp (E) cắt các trục toạ độ tại A và B. xác định toạ độ của M để ΔOAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 9: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a>b.$$

Từ điểm M tuỳ ý trên đường chuẩn (Δ) kẻ được hai tiếp tuyến đến (E) và tiếp xúc với (E) tại P và Q.

a. CMR đường thẳng (PQ) đi qua F.

b. Xác định vị trí của M để độ dài đoạn PQ nhỏ nhất

Bài tập 10: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a > b.$$

Gọi $A_2(a, 0)$ là đỉnh trên trục lớn của (E). Góc vuông tA_2z quay quanh A_2 cắt (E) tại P, Q không trùng với I.

a. Chứng minh rằng đường thẳng (PQ) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Tiếp tuyến của (E) tại P, Q cắt nhau tại M. Chứng minh rằng chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 11: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a > b.$$

Gọi A_1A_2 là trục lớn của Elíp. Dựng các tiếp tuyến A_1t_1, A_2t_2. Một tiếp tuyến đi qua $T \in (E)$ cắt A_1t_1 và A_2t_2 tại M và N.

a. Chứng minh rằng các tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

b. Chứng minh rằng tích $A_1M.A_2N$ không phụ thuộc vào T.

c. Xác định tiếp tuyến sao cho ΔFMN có diện tích nhỏ nhất, trong đó F là một trong hai tiêu điểm của (E).

d. Tìm quĩ tích giao điểm I của A_1N và A_2M khi T chạy trên (E).

Bài tập 12: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, với } a>b.$$

Hình chữ nhật Q được gọi là hình chữ nhật ngoại tiếp Elíp (E) nếu mỗi cạnh của Q đều tiếp xúc với (E). Trong tất cả các hình chữ nhật ngoại tiếp (E), hãy xác định:

a. Hình chữ nhật có diện tích nhỏ nhất.

b. Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài tập 13: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ngoại tiếp (E) có diện tích bằng 15.

b. Viết phương trình các cạnh của hình vuông ngoại tiếp (E).

Bài tập 14: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \ (E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

a. Một tiếp tuyến bất kỳ của (E_2) cắt (E_1) tại hai điểm P, Q. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (E_1) tại P, Q vuông góc với nhau.

b. Từ điểm M trên (E_1) kẻ hai tiếp tuyến Mt_1, Mt_2 đến (E_2). Chứng minh rằng hai góc $\widehat{t_1Mt_2}$ và $\widehat{F_1MF_2}$ (với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E_1), (E_2)) có chung đường phân giác.

c. Phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát.

Bài tập 15: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

với hai đỉnh $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$. Điểm M thuộc (H) có hình chiếu trên Ox là H. Mt là tiếp tuyến của (H) tại M, Mz là đường thẳng vuông góc với Mt tại M và (d_1), (d_2) là các tiếp tuyến của (H) tại A_1 và A_2. Mt cắt (d_1), (d_2) lần lượt tại P, Q và các đường thẳng Mt, Mz cắt Ox lần lượt tại T, Z và Oy lần lượt tại T_1, Z_1. Chứng minh rằng:

a. $OM^2 - MF_1.MF_2 = 3$.

b. $(MF_1 + MF_2)^2 - 4OM^2 = 4$.

c. $\overline{PA_1}.\overline{QA_2} = -1$.

d. $HM^2 = \dfrac{\overline{HA_1}.\overline{HA_2}}{4}$

e. $\overline{OT}.\overline{OZ}$, $\overline{OT_1}.\overline{OZ_1}$ và $\dfrac{\overline{MZ}}{\overline{MZ_1}}$ không đổi.

f. Các đường tròn đường kính T_1N_1 và PQ đi qua hai tiêu điểm của (H).

g. Lập phương trình quỹ tích giao điểm của A_1Q và A_2P khi M thay đổi.

Bài tập 16: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiêu điểm F_1, F_2 tới một tiếp tuyến bất kỳ của một Hypecbôn bằng b^2.

b. Đường thẳng (d) di động không qua O sao cho F_1, F_2 ở hai phía đối với (d) và tích các khoảng cách từ F_1, F_2 tới (d) bằng b^2. Chứng minh rằng (d) tiếp xúc với (H).

c. M di động trên (H), các đường thẳng F_1M và F_2M cắt (H) tại E_1, E_2 khác M. Chứng minh rằng đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

d. Hai tiếp tuyến của (H) cắt hai tiệm cận theo thứ tự tại A, B và C, D. Chứng minh rằng:

- $OA.OB = a^2 + b^2$ và AD//BC.
- Các điểm F_1, F_2, A, B, B_1 trong đó B_1 là điểm đối xứng với B qua Oy, cùng thuộc một đường tròn.

Bài tập 17: Cho Parabôn (P) có phương trình:

(P): $y^2 = 2px$, F là tiêu điểm.

a. (d) là tiếp tuyến tại đỉnh của (P), M là một điểm thuộc (d), (Δ) là một đường thẳng đi qua M. Chứng minh rằng (Δ) là tiếp tuyến với (P) khi và chỉ khi (Δ) vuông góc với FM.

b. Từ điểm N kẻ được hai tiếp tuyến đến (P) và tiếp xúc với (P) tại M_1, M_2. Một tiếp tuyến tuỳ ý của (P) tiếp xúc với (P) tại T và cắt NM_1, NM_2 theo thứ tự tại T_1, T_2. Chứng minh rằng:

- $FN^2 = FM_1.FM_2$.
- $\dfrac{NM_1^2}{NM_2^2} = \dfrac{FM_1}{FM_2}$.
- $\dfrac{FT_1.FT_2}{FT}$ không phụ thuộc T.

Bài tập 18: Cho Parabôn (P) có phương trình:

(P): $y^2 = 2px$,

F là tiêu điểm và M, N$\in$(P).

a. Chứng minh rằng tiếp tuyến với (P) tại M là đường phân giác ngoài của góc (FM, (d_M)), trong đó (d_M) là đường thẳng qua M song song với Ox.

b. Tìm toạ độ giao điểm I của hai tiếp tuyến tại M, N của (P) theo toạ độ của M, N.

c. Chứng minh rằng $\widehat{IFM} = \widehat{IFN}$.

Bài tập 19: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

(P): $y^2=4x$ và (d): $x - 2my - 1 = 0$.

a. Tiếp tuyến của (P) tại một điểm M bất kỳ cắt Ox, Oy tại A và B.

- Tìm quỹ tích trung điểm C của AB.
- Chứng minh rằng $FB \perp MB$ và $\dfrac{FB^2}{FM}$ không đổi.
- Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và vuông góc với tiếp tuyến tại M, K là hình chiếu vuông góc của F lên (Δ). CMR K chạy trên một Parabôn cố định.

b. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, (d) luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quĩ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

Bài tập 20: Cho Parabôn (P) có phương trình:

$$(P): x^2 = 4y$$

a. Chứng minh rằng từ một điểm N tuỳ ý thuộc đường chuẩn của (P) có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (P) mà hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

b. Gọi T_1, T_2 lần lượt là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói trên. CMR T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định khi N chạy trên đường chuẩn của (P).

c. Cho M là một điểm thuộc (P) (M khác đỉnh của (P)). Tiếp tuyến tại M của (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm quĩ tích trung điểm I của AB khi M chạy trên (P).

Bài toán 4: Quỹ tích liên quan tới tiếp tuyến (d).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng dạng phương trình tiếp tuyến của đường Cônic.

1. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Hypecbôn (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tìm tập hợp các điểm từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (H).

Giải

Giả sử $M(x_0, y_0)$, từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (H).

Hai đường thẳng qua M vuông góc với nhau có dạng:

$$(d_1): y=k(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow (d_1): y=kx-kx_0+y_0.$$

$$\text{và } (d_2): y=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow (d_2): y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}x_0+y_0.$$

Điều kiện để (d_1) và (d_2) tiếp xúc với (H) là:

$$\begin{cases} k^2a^2 - b^2 = (y_0 - kx_0)^2 \\ \left(-\frac{1}{k}\right)^2 a^2 - b^2 = (y_0 + \frac{1}{k}.x_0)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2a^2 - b^2 = (y_0 - kx_0)^2 \\ a^2 - k^2b^2 = (ky_0 + x_0)^2 \end{cases} \quad (I)$$

Khử k từ hệ (I), ta được: $x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2$. (*)

Vậy, ta có các trường hợp:

Với a>b, tập hợp các điểm M từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (H) là một đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{a^2 - b^2}$.

Với $a \le b$, không tồn tại điểm M.

Ví dụ 2: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Điểm M chạy trên đường thẳng (d) cố định, không cắt (E) đã cho. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo toạ độ của M.

b. Chứng minh rằng khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a. Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với Elíp (E) tại $T(x_1, y_1)$ có dạng:

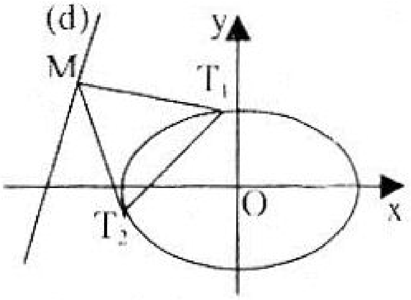
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta có

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1. \qquad (1)$$

- Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

$$(T_1T_2):\ \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$



b. Giả sử phương trình đường thẳng (d):

(d): $Ax+By+C=0$ điều kiện $A^2+B^2>0$.

Điểm $M(x_0, y_0)\in(d)$

$\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C=0 \Leftrightarrow By_0=-Ax_0-C.$

Khi đó, (T_1T_2) có dạng:

$$(T_1T_2):\ \frac{Bxx_0}{a^2}+\frac{Byy_0}{b^2}=B \Leftrightarrow (T_1T_2):\ \frac{Bxx_0}{a^2}-\frac{(Ax_0+C)y}{b^2}=B$$

Gọi $N(x, y)$ là điểm cố định mà (T_1T_2) luôn đi qua với mọi x_0, khi đó

$$\frac{Bxx_0}{a^2}-\frac{(Ax_0+C)y}{b^2}=B,\ \forall x_0 \Leftrightarrow \left(\frac{Bx}{a^2}-\frac{Ay}{b^2}\right)x_0-\frac{Cy}{b^2}-B=0,\ \forall x_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{Bx}{a^2}-\dfrac{Ay}{b^2}=0\\ -\dfrac{Cy}{b^2}-B=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{Aa^2}{C}\\ y=-\dfrac{Bb^2}{C}\end{cases}.$$

Vậy (T_1T_2) luôn đi qua điểm cố định $N\left(-\dfrac{Aa^2}{C}, -\dfrac{Bb^2}{C}\right)$.

Ví dụ 3: Cho Hypebôn (H) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ và } (C):\ x^2+y^2=R^2 \text{ với } 0<R\le a.$$

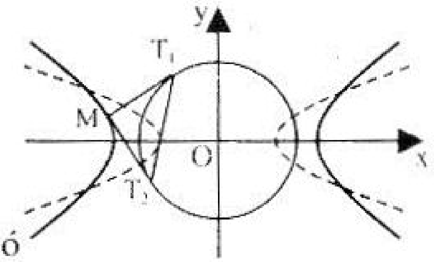
a. Từ $M\in(H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebôn cố định.

b. Từ $N\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Giải

a. Chuyển phương trình (H) về dạng tham số

$$(H):\ \begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos t}=x(t)\\ y=b\text{tg}t=y(t)\end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$



Điểm $M(x_0, y_0) \in (H) \Rightarrow M(x(t), y(t))$

Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) có dạng:

$$xx_1+yy_1=R^2.$$

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta có

$$x_0x_1+y_0y_1=R^2. \qquad (1)$$

- Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

$$x_0x+y_0y=R^2 \Leftrightarrow (T_1T_2):\ \frac{ax}{\cos t}+by\text{tg}t=R^2$$

$$\Leftrightarrow (T_1T_2):\ ax+by\sin t=R^2.\cos t$$

Gọi $N(x, y)$ là điểm mà (T_1T_2) không đi qua với mọi t, khi đó

$$ax+by\sin t=R^2.\cos t, \text{ vô nghiệm } \forall t$$

$$\Leftrightarrow R^2\cos t-by\sin t=ax, \text{ vô nghiệm } \forall t$$

$$\Leftrightarrow R^4+b^2y^2<a^2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}<1.$$

Ta đi chứng minh (T_1T_2) tiếp xúc với Hypecbôn (H_1): $\frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}=1$.

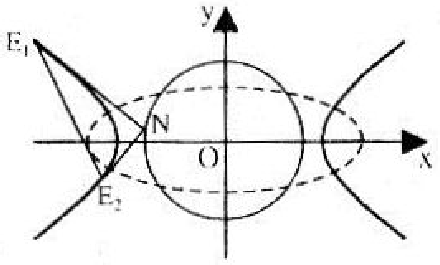
Thật vậy:

$$\frac{R^4}{a^2}.a^2-\frac{R^4}{b^2}.b^2\sin^2t=R^4\cos^2t \text{ luôn đúng}$$

Vậy (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Hypecbôn (H_1): $\frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}=1$.

b. Chuyển phương trình (C) về dạng tham số

$$(C): \begin{cases} x = R\sin t = x(t) \\ y = R\cos t = y(t) \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$



Điểm $N(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow M(x(t), y(t))$

Gọi toạ độ của tiếp điểm $E(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với Hypecbôn (H) có dạng:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta có

$$\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0y_1}{b^2}=1. \qquad (2)$$

- Nhận thấy toạ độ E_1, E_2 đều thoả mãn (2), vậy phương trình đường thẳng (E_1E_2) có dạng:

$$(E_1E_2):\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \Leftrightarrow (E_1E_2):\ \frac{Rx\sin t}{a^2}-\frac{Ry\cos t}{b^2}=1$$

Gọi P(x, y) là điểm mà (E_1E_2) không đi qua với mọi t, khi đó

$$\frac{Rx\sin t}{a^2} - \frac{Ry\cos t}{b^2} = 1 \text{, vô nghiệm } \forall t$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2x^2}{a^4} + \frac{R^2y^2}{b^4} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^4/R^2} + \frac{y^2}{b^4/R^2} < 1$$

Ta đi chứng minh (E_1E_2) tiếp xúc với Elíp (E_1): $\frac{x^2}{a^4/R^2} + \frac{y^2}{b^4/R^2} = 1$.

Thật vậy :

$$\frac{R^2\sin^2 t}{a^4}.\frac{a^4}{R^2} + \frac{R^2\cos^2 t}{b^4}.\frac{a^4}{R^2} = 1 \text{ luôn đúng}$$

Vậy (E_1E_2) luôn tiếp xúc với Elíp (E_1): $\frac{x^2}{a^4/R^2} + \frac{y^2}{b^4/R^2} = 1$.

Chú ý:

1. Trong bài toán trên nếu giả sử MT_1, MT_2 cắt (C) tại hai điểm E_1, E_2 khác M. Khi đó:
   a. Đường thẳng (E_1E_2) cũng tiếp xúc với một Elíp cố định nếu $a^2+b^2 \neq R^2$.
   b. Đường thẳng (E_1E_2) luôn đi qua O nếu $a^2+b^2=R^2$.
2. Phương pháp trên cũng được mở rộng tự nhiên để giải bài toán sau:

Bài toán 1 : Cho Hypecbôn (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \text{ và } (E): \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1 \text{ với } 0 < a_2 \leq a_1.$$

a. Từ $M \in (H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

b. Từ $N \in (E)$ kẻ 2 tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Bài toán 2 : Cho đường tròn (C) và Parabôn (P) có phương trình:

$$(C) : (x-a)^2 + y^2 = R^2 \text{ và } (P): y^2 = 2px \text{ với } 0 < p \text{ và } a + R < 0$$

Từ điểm $M \in (C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo toạ độ của M.

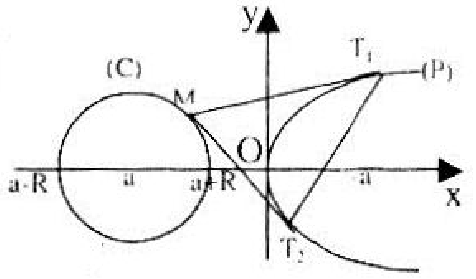
b. Chứng minh rằng khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

Giải

a. Chuyển phương trình (C) về dạng tham số

$$(C): \begin{cases} x = a + R\sin t \\ y = R\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Điểm $M(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow M(a+R\sin t, R\cos t)$



Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với Parabôn (P) tại $T(x_1, y_1)$ có dạng:

  $yy_1=p(x+x_1)$.

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta có

  $y_0y_1 = p(x_0 + x_1)$. (1)

- Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình (T_1T_2) có dạng:

$$yy_0 = p(x + x_0) \Leftrightarrow (T_1T_2): Rycost = p(x+a+Rsint)$$

$$\Leftrightarrow (T_1T_2): px - Rycost + p(a + Rsint) = 0.$$

b. Gọi N(x, y) là điểm mà (T_1T_2) không đi qua với mọi t, khi đó

$$px - Rycost + p(a+Rsint)=0, \text{ vô nghiệm } \forall t$$

$$\Leftrightarrow pRsint - Rycost = -px - pa, \text{ vô nghiệm } \forall t$$

$$\Leftrightarrow (pR)^2+(yR)^2<(-px - pa)^2 \Leftrightarrow \frac{(x+a)^2}{R^2} - \frac{y^2}{p^2} > 1.$$

Ta đi chứng minh (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Hypecbôn (H): $\frac{(x+a)^2}{R^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$.

Thật vậy xét hệ phương trình tạo bởi (H_1) và (d) ta có:

$$\begin{cases} \frac{(x+a)^2}{R^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1 \\ px - Rycost + p(a+Rsint) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2sin^2t+2ypsint.cost+p^2cos^2t=0. \ (*)$$

Phương trình (*) luôn có nghiệm kép.

Vậy (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Hypecbôn (H): $\frac{(x+a)^2}{R^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$.

2. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Hypecbôn (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \text{ và } (d): x+y-1=0.$$

Từ $M \in (d)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (H), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR khi đó đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 2: Cho Parabôn (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): (y-1)^2=2(x-1) \text{ và } (d): x-y+1=0.$$

Từ $M \in (d)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (P), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR khi đó đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 3: Cho đường tròn (C) và Elíp (E) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=25 \text{ và } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Từ $M \in (C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm và giả sử MT_1, MT_2 cắt (C) tại E_1, E_2

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 4: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Từ $M \in (E_2)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E_1), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm và giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_2) tại E_1, E_2

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 5: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Từ $M \in (E_1)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E_2), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_1) tại hai điểm E_1, E_2 khác M.

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định

Bài tập 6: Cho Hypecbôn (H) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (C): x^2+y^2=4.$$

a. Từ $M \in (H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

b. Từ $N \in (C)$ kẻ hai tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 7: Cho Hypecbôn (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } (E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Từ $M \in (H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_1) tại hai điểm E_1, E_2 khác M.

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

b. CMR đường thẳng (E_1E_2) luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

Bài tập 8: Cho Hypecbôn (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1 \text{ và } (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a. Từ $M \in (H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

b. Từ $N \in (E)$ kẻ hai tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 9: Cho Hypecbôn (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \text{ và } (E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Từ $M\in(H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_1) tại hai điểm E_1, E_2 khác M.

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định.

Bài tập 10: Cho đường tròn (C) và Parabôn (P), từ điểm $M\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (P), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypecbôn cố định, biết:

a. (C): $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ và (P): $y^2 = x$.

b. (C): $x^2+(y - 2)^2 =1$ và (P): $x^2 = -2y$.

Bài tập 11: Cho 2 Parabôn (P_1), (P_2) có chung tiêu điểm, chung trục đối xứng và hai đỉnh A_1, A_2 của (P_1), (P_2) nằm về hai phía của F. Gọi M là giao điểm của (P_1) và (P_2). Chứng minh rằng hai tiếp tuyến của (P_1), (P_2) tại M vuông góc với nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ba cuốn sách giáo khoa Hình học 10. Nhà xuất bản Giáo dục.
2. Trần Thành Minh (Chủ biên). Giải toán Hình học 10. Nhà xuất bản giáo dục - 2001.
3. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Gáo dục.
4. Lê Hồng Đức - Trần Phương, Chuyên đề Luyện thi Đại học Môn Toán - Hình học Giải tích. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
5. Lê Hồng Đức - Lê Hữu Trí. Các phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong mặt phẳng. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
6. Lê Hồng Đức - Lê Bích Ngọc. Các phương pháp giải Toán Lượng giác. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
7. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thuy, Tạ Mân, Đào Tam, Lê Thống Nhất. Các bài giảng luyện thi môn toán-Tập3. Nhà xuất bản giáo dục - 1996.
8. Ba cuốn sách giáo khoa Đại số 10. Nhà xuất bản Giáo dục.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG

CHƯƠNG I

VECTƠ

Chủ đề 1: Vectơ - Các phép toán vectơ 5
Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức vectơ.....7
Bài toán 2: Biểu diễn vectơ.....11
Bài toán 3: Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ.....14
Bài toán 4: Quỹ tích điểm.....18
Bài toán 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau
Chứng minh ba điểm thẳng hàng.....21
Bài toán 6: Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định.....24
Bài toán 7: Nhận dạng.....26
Bài toán 8: Đẳng thức và bất đẳng thức vectơ.....29
Chủ đề 2: Tích vô hướng của hai vectơ 31
Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác
chứa các cung đặc biệt.....33
Bài toán 2: Tính tích vô hướng của hai vectơ.....34
Bài toán 3: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài...39
Bài toán 4: Chứng minh tính vuông góc -
Thiết lập điều kiện vuông góc 42
Bài toán 5: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán định lượng,
định tính.....46
Bài toán 6: Điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng
hay về độ dài.....50
Bài toán 7: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán cực trị.....56
Bài toán 8: Sử dụng tích vô hướng chứng minh bất đẳng thức.....58

CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Chủ đề 1: Hệ thức lượng trong tam giác.....60
Bài toán 1: Định lý cosin trong tam giác.....62

Bài toán 2: Định lý sin trong tam giác............ ... .66
Bài toán 3: Đường trung tuyến trong tam giác... 70
Bài toán 4: Đường cao trong tam giác... 74
Bài toán 5: Đường phân giác trong tam giác... 77
Bài toán 6: Đường tròn ngoại tiếp tam giác... 81
Bài toán 7: Đường tròn nội tiếp tam giác... 84
Bài toán 8: Chu vi tam giác... 88
Bài toán 9: Diện tích tam giác - Tỷ số diện tích.. 92
Bài toán 10: Hệ thức lượng trong tam giác thường.. 99
Bài toán 11: Hệ thức lượng trong tam giác vuông.. 103
Bài toán 12: Hệ thức lượng trong tam giác cân.. 108
Bài toán 13: Hệ thức lượng trong tam giác đều.. 111
Chủ đề 2: Hệ thức lượng trong đường tròn.............. ... .114
Bài toán 1: Tính phương tích của một điểm
đối với một đường tròn 116
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức phương tích...... ... .120
Bài toán 3: Tứ giác nội tiếp đường tròn 124
Bài toán 4: Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn 126
Bài toán 5: Chứng minh tính chất hình học...... ... .128
Bài toán 6: Trục đẳng phương của hai đường tròn 131
Bài toán 7: Tập hợp điểm...... ... .136

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Chủ đề 1: Toạ độ điểm trên trục 140
Bài toán 1: Xác định toạ độ của một điểm
thoả mãn điều kiện cho trước......... 140
Chủ đề 2: Hệ toạ độ Đềcác vuông góc 142
Bài toán 1: Toạ độ vectơ - toạ độ của điểm......... 143
Bài toán 2: Biểu diễn vectơ...145
Bài toán 3: Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ, độ dài.........147

- **Bài toán 4:** Vectơ cùng phương - Ba điểm thẳng hàng - Định lý Menelaus 150
- **Bài toán 5:** Điểm chia đoạn thẳng 155
- **Bài toán 6:** Hàng điểm điều hoà 159
- **Bài toán 7:** Phương pháp toạ độ hoá 161
- **Bài toán 8:** Biểu thức toạ độ của tích vô hướng 163

Chủ đề 3: Đường thẳng 168

- **Bài toán 1:** Phương trình đường thẳng 172
- **Bài toán 2:** Lập phương trình đường thẳng 175
- **Bài toán 3:** Hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng 182
- **Bài toán 4:** Vị trí tương đối của hai đường thẳng 187
- **Bài toán 5:** Điểm thuộc đường thẳng - Quỹ tích điểm 191

Chủ đề 4: Đường tròn 198

- **Bài toán 1:** Phương trình đường tròn 200
- **Bài toán 2:** Lập phương trình đường tròn 203
- **Bài toán 3:** Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và đường tròn 213
- **Bài toán 4:** Tiếp tuyến của đường tròn 219
- **Bài toán 5:** Điểm thuộc đường tròn - Quỹ tích điểm 228

Chủ đề 5: Elíp 234

- **Bài toán 1:** Xác định thuộc tính của Elíp 236
- **Bài toán 2:** Lập phương trình đường Elíp 239
- **Bài toán 3:** Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Elíp 244
- **Bài toán 4:** Điểm thuộc Elíp - Quỹ tích điểm 248

Chủ đề 6: Hypecbôn 258

- **Bài toán 1:** Xác định thuộc tính của Hypecbôn 261
- **Bài toán 2:** Lập phương trình đường Hypecbôn 267
- **Bài toán 3:** Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Hypecbôn 270
- **Bài toán 4:** Điểm thuộc Hypecbôn - Quỹ tích điểm 275

Chủ đề 7: Parabôn 282

- **Bài toán 1:** Xác định thuộc tính của Parabôn 283
- **Bài toán 2:** Lập phương trình đường Parabôn 286

Bài toán 3: Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Parabôn......289
Bài toán 4: Điểm thuộc Parabôn - Quỹ tích điểm...... 294
Tổng kết ba đường Côníc...... 302
I. Đường chuẩn của đường Côníc... 302
Bài toán 1: CMR đường cong ($\mathscr{C}$): f(x, y, m)=0 là một Côníc. 303
Bài toán 2: Lập phương trình của một Côníc...... 306
Bài toán 3: Sử dụng phương trình đường chuẩn của các Côníc....... 307
II. Tiếp tuyến của đường Côníc... 310
Bài toán 1: Lập phương trình tiếp tuyến của Côníc ($\mathscr{C}$) 310
Bài toán 2: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai Côníc....... .318
Bài toán 3: Chứng minh tính chất tiếp tuyến của Côníc ($\mathscr{C}$) 322
TÀI LIỆU THAM KHẢO...... 339

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: LAN HƯƠNG

Sửa bản in: PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa: HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN HÌNH HỌC 10

Mã số: 1L - 73 ĐH 2005

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ và Truyền hình - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 162 - 2005/CXB/ 11 – 260/ĐHQGHN, ngày 05/12/2005.

Quyết định xuất bản số: 49 KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.